L

UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

NIKOLIĆ A. IGNJAT

HAMILTONOVA FORMULACIJA AJNŠTAJN - KARTANOVE TEORIJE GRAVITACIJE

- MAGISTARSKI RAD -

BEOGRAD
APRIL 1981.

Osecam prijatnu dužnost da se na ovom mestu najiskrenije zahvalim na pomoci i podržci koju su mi u mom dosadašnjem radu pružili Dr Djordje Živanović, rukovodioc rada, Dr Milutin Blagojević i Dr Dragan Popović .

Ignjat A. Nikolić

S A D R Ž A J

U V O D

Iako je Ajnštajnova opšta teorija relativnosti u skladu sa svim dosad poznatim eksperimentima, čitav niz godina vrše se istraživanja koja imaju za cilj modifikaciju ove teorije. Razlozi su višestruki i pretežno su teorijske prirode: singulariteti, nemogućnost uspešne kvantizacije gravitacije, potisnuta uloga spina u ovoj teoriji, specifična uloga gravitacije u odnosu na ostale fundamentalne fizičke interakcije, itd.

Gravitacija kao kalibraciono invarijantna (gauge invariant) teorija za sada je jedini kandidat koji treba da prevazidje neke od nabrojanih problema opšte teorije relativnosti.[1) Najprostija varijanta ovakvih teorija, zasnovana na Poenkareovoj grupi, odgovara Ajnštajn-Kartanovoj teoriji, u kojoj je torzija različita od nule (za razliku od Ajnštajnove teorije), ali je nedinamička. Nažalost, i u ovoj teoriji ostaje problem kvantizacije i singulariteta. O njoj će biti više reči u prvom odeljku ovog rada.

Teorije sa kvadratičnim Lagranžijanima, u kojima torzija ima dinamičku ulogu, još uvek nisu detaljno ispitane. Problem kvantizacije ostaće skoro sigurno i u njima, dok je pitanje singularnosti još otvoreno. Metod koji će biti izložen u ovom radu moguće je primeniti i na ove teorije. Tako je u trećem odeljku, nadjen opšti oblik Hamiltonijana materije u gravitacionom polju primenljiv i na kvadratične Lagranžijane.

Sve kalibraciono invarijantne teorije nužno su opisane singularnim Lagranžijanima, pa je prelaz na Hamiltonov formalizam nužno izvesti Dirakovim metodom,[2] **čije su osnovne karakteristike izložene u drugom odeljku.** Hamiltonovu formulaciju Ajnštajnove teorije gravitacije dao je sam Dirak,[3] dok je Ajnštajn-Kartanova teorija u Hamiltonovoj formi data u radu M. Kasuy-e.[4] Činjenica da je metod izložen u ovim radovima neprimenljiv na kvadratične Lagranžijane bila je direktna inspiracija za ovaj rad. U njemu je takodje opravdan uticaj eliminacije izvesnog broja stepeni slobode u Lagranževom formalizmu na konstrukciju Dirakovih zagrada. Diskusija ovih pitanja izložena je u petom odeljku, gde je razmotren primer spinornog polja, kojim su se i bavili pomenuti autori.

Centralni deo ovog rada izložen je u četvrtom odeljku, gde je data kompletna Hamiltonova formulacija Ajnštajn-Kartanove teorije gravitacije u interakciji sa materijom opisanom linearnim Lagranžijanom. Ovaj, kao i predhodni odeljak, predstavljaju u neku ruku direktnu generalizaciju rezultata[5] koji će biti objavljeni u časopisu Il Nuovo Cimento B tokom ove godine.[6]

I. AJNŠTAJN-KARTANOVA TEORIJA GRAVITACIJE KAO KALIBRACIONO INVARIJANTNA TEORIJA

Pre nego što se detaljnije zadržimo na Ajnštajn-Kartanovoj teoriji podsetimo se u najkraćim crtama standardnih kalibraciono invarijantnih teorija sa unutrašnjim grupama simetrije.

Posmatrajmo neku kontinualnu Lievu grupu transformacija polja materije koja zavisi od n konstantnih parametara θ^a, ($\partial_k \theta^a \hat{=} \partial\theta^a/\partial x^k \hat{=} \theta^a{}_{,k} = 0$). Ovu početnu grupu simetrije zvaćemo globalnom. U infinitezimalnoj formi zakon transformacije polja materije $u(x)$ i njihovih izvoda dat je formulama

$$\delta_0 u(x) = \theta^a T_a u(x) \qquad \delta_0 \partial_k u(x) = \theta^a T_a \partial_k u(x) \tag{1,2}$$

(podrazumevamo Ajnštajnovu konvenciju o sumiranju), gde su T_a generatori izabrane reprezentacije po kojoj se transformišu vektor-kolone $u(x)$, i koji zadovoljavaju komutacione relacije:

$$[T_a, T_b] \hat{=} T_a T_b - T_b T_a = f_a{}^c{}_b T_c , \tag{3}$$

dok su $f_a{}^c{}_b$ strukturne konstante grupe. Pri izvodjenju formule (2) koristi se konstantnost parametara grupe i činjenica da tzv. form-varijacija funkcije

$$\delta_0 u(x) \hat{=} u'(x) - u(x) \tag{4}$$

komutira sa izvodima. Iz invarijantnosti dejstva sistema S, koristeći činjenicu da je grupa simetrije unutrašnja, sledi i

invarijantnost gustine Lagranžijana L (koji ćemo kratko zvati Lagranžijanom)

$$\delta_c S = 0 \rightarrow \delta_c L = 0 \qquad (5,6)$$

Ako sada dopustimo da parametri θ^a zavise od koordinata: $\theta^a = \theta^a(x)$ (čime sa globalne prelazimo na tzv. <u>lokalnu</u> grupu), izvodi polja materije neće se više transformisati po zakonu (2), usled čega više ni Lagranžijan, a ni dejstvo, neće biti invarijantni. Ukoliko želimo da zadržimo invarijantnost u odnosu na lokalnu grupu moramo reformulisati teoriju na sledeći način:

1) Definišimo kovarijantni izvod polja materije relacijom

$$D_k u(x) \doteq \partial_k u(x) + A^a{}_k T_a u(x) \qquad (7)$$

čime smo u teoriju uveli 4n novih "kompenzacionih polja" - <u>potencijala</u> - $A^a{}_k$. Zahtevajmo da se novi izvod transformiše kao i samo polje materije,

$$\delta D_k u(x) \doteq \theta^a(x) T_a D_k u(x) \qquad (8)$$

odakle jednoznačno dobijamo nekovarijantni zakon transformacije potencijala $A^a{}_k$, koji mi nećemo navoditi.

2) Definišimo novi Lagranžijan teorije tako što ćemo u starom zameniti obične izvode kovarijantnim

$$L(u, \partial_k u, A^a{}_k) \doteq L(u, \partial_k u \rightarrow D_k u) \equiv L(u, D_k u) \qquad (9)$$

Ovaj Lagranžijan invarijantan je u odnosu na lokalnu grupu transformacija.

3) Na kraju, Lagranžijanu materije u potencijalu $A^a{}_k$ (9) treba dodati i Lagranžijan L^A slobodnih A-polja. Iz invarijantnosti L^A u odnosu na lokalnu grupu sledi da on od potencijala A može zavisiti samo preko tzv. kompenzacionih <u>polja</u>:

$$F^a{}_{ij} \doteq \partial_j A^a{}_i - \partial_i A^a{}_j - f_b{}^a{}_c A^b{}_i A^c{}_j , \qquad (10)$$

koja se transformišu kovarijantno (po regularnoj reprezentaciji lokalne grupe). Izbor Lagranžijana L^A nije jednoznačan. Najprostija mogućnost je

$$L^A \doteq -\frac{1}{4} F^a{}_{ij} F_a{}^{ij} \qquad (11)$$

dobro poznata iz elektrodinamike.

U formuli (11) Latinske indekse podižemo pomoću dijagonalnog metričkog tenzora η_{ij} sa komponentama $\eta_{oo} = -\eta_{aa} = 1$ $a = 1,2,3$, dok grupne indekse spuštamo pomoću metrike $g_{ad} = f_a{}^b{}_c f_b{}^c{}_d$. Primetimo važnu činjenicu da član $m^2 A^a{}_j A_a{}^j$ nije invarijantan u odnosu na lokalizovanu grupu, odnosno da su čestice pridružene potencijalima $A^a{}_k$ nužno bez mase. One se zato i nazivaju nemasenim kalibracionim bozonima.

Podjimo sada na slučaj klasične, relativistički invarijantne teorije, kod koje je globalna grupa simetrije Poenkareova grupa. Značaj Poenkareovih transformacija $x'^i = a^i + \Lambda^i{}_j x^j$ je u tome što one predstavljaju jedinstvene nesingularne transformacije koordinata koje očuvavaju interval[7], odakle i sledi kinematika specijalne teorije relativnosti. U infinitezimalnoj formi one su zadane formulom

$$\delta x^i \doteq x'^i - x^i \doteq \omega^i{}_j\, x^j + \varepsilon^i \quad ; \quad \omega^{kl} = -\omega^{lk} \tag{12}$$

gde su ω^{kl} parametri Lorencove grupe, a ε^k parametri translacija. Klasična relativistička polja pri tome se transformišu na sledeći način:

$$u(x) \to u'(x) = D(\Lambda)\, u(\Lambda^{-1}(x-a)) \,,$$

gde matrice D čine reprezentaciju Lorencove grupe. Iz poslednjeg izraza lako nalazimo form-varijaciju polja materije (4):

$$\delta_o u(x) = (\varepsilon^i P_i + \frac{1}{2} \omega^{ij} M_{ij})\, u(x) \tag{13}$$

gde su (antihermitski) generatori impulsa i momenta impulsa dati izrazima

$$P_k = \partial_k \qquad M_{ij} = x_i \partial_j - x_j \partial_i + S_{ij} \tag{14}$$

a S_{ij} su generatori D-reprezentacije Lorencove grupe. U slučaju ireducibilne reprezentacije S_{ij} je tenzor spina klasičnog polja. Koristeći komutativnost izvoda i form varijacije dobijamo

$$\delta_o \partial_k u = (\varepsilon^k P_k + \frac{1}{2} \omega^{ij} M_{ij})\, \partial_k u - \omega^i{}_k\, \partial_i u \tag{15}$$

Uočimo poslednji sabirak u (15): on nam pokazuje da je izvod polja $\partial_k u$ Lorencov vektor po indeksu "k".

Uslov invarijantnosti dejstva u odnosu na Poenkareovu grupu $\delta_o S = 0$, za razliku od unutrašnjih grupa, daće:

$$\delta_o L + L,_k\, \delta x^k = 0 \tag{16}$$

Dopustimo sada da parametri ω^{kl} i ε^k postanu proizvoljne funkcije koordinata. Umesto (12) tada imamo:

$$\delta x^k = \omega^k{}_l(x)\, x^l + \varepsilon^k(x) \tag{17}$$

odakle vidimo da je i varijacija δx^k proizvoljna funkcija, tako da iz jednog (Lorencovog) sistema možemo preći u proizvoljan (krivolinijski) sistem koordinata. Drugim rečima, lokalizovana Poenkareova grupa je grupa opštih koordinatnih transformacija GL (4). Ove opšte sisteme koordinata označavaćemo grčkim inceksima, a takodje i sve veličine koje se transformišu po GL(4), za razliku od Lorencovih tenzora za koje ćemo zadržati latinske indekse. Umesto (17) treba pisati

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu(x)\, x^\nu + \varepsilon^\mu(x) \tag{17'}$$

U formulama (13) - (16) treba takodjezameniti sve indekse grčkim, osim za veličine koje se odnose na Lorencove sisteme, a to su ω^{ij} , S_{ij} i izvodi polja materije. Formalno, možemo definisati i ove veličine sa grčkim indeksima, koristeći delta funkcije: $\delta^\mu{}_k$ i $\delta_\mu{}^k$.

Pošto naša teorija nije invarijantna u odnosu na GL(4), po analogiji sa unutrašnjim grupama, definisaćemo kovarijantni izvod, uvodeći kompenzacione potencijale $A^\mu{}_k$ i $A^{ij}{}_k$:

$$D_k u(x) = (\partial_k + A^\mu{}_k P_\mu + \frac{1}{2} A^{ij}{}_k M_{ij})\, u(x) \tag{18}$$

tako da se novi izvod (18), u odnosu na GL(4), transformiše kao i stari u odnosu na Poenkareovu grupu. Odatle dobijamo zakon transformacije potencijala koji je u skladu sa gore navedenom konvencijom o izboru tipa indeksa[5].

Ako sada definišemo novi Lagranžijan formulom:

$$L^{o}(u, \partial_k u, A) \hat{=} L(u, D_k u) \qquad (19)$$

za njega će važiti uslov invarijantnosti (16), odnosno $\delta_o L^o + L^o{}_{,\mu}\, \delta x^\mu = 0$. Medjutim, u slučaju opštih transformacija, uslov invarijantnosti dejstva $\delta_o S = 0$ daje

$$\delta_o L = L_{,\mu}\, \delta x^\mu + L(\delta x^\mu)_{,\mu} = 0 \; , \qquad (20)$$

tako da još uvek nismo dobili invarijantnu teoriju ako bismo zadržali Lagranžijan L^o. Može se pokazati[1] da će uslov (20) važiti za Lagranžijan dat izrazom:

$$L(u, \partial u, h, A) \hat{=} b\, L^o \hat{=} \det(b^k{}_\mu)\, L(u, \partial_k u) \; , \qquad (21)$$

gde su $b^k{}_\mu$ inverzna tetradna polja:

$$b^k{}_\mu\, h_k{}^\nu = \delta_\mu^\nu \quad ; \quad b^k{}_\mu\, h_l{}^\mu = \delta^k_l \quad , \qquad (22)$$

dok su tetradna polja definisana preko A-potencijala relacijom:

$$h_k{}^\mu \hat{=} \delta_k^\mu - (A^\mu{}_k + A^{\mu\nu}{}_k\, x_\nu) \qquad (23)$$

Nadalje ćemo tetradna polja $h_k{}^\mu$ i potencijale $A^{ij}{}_\mu = b^k{}_\mu A^{ij}{}_k$ [5] smatrati osnovnim varijablama teorije. Ona će karakterisati

gravitacionu interakciju polja materije.

Pošto se, kao i u slučaju unutrašnjih grupa, potencijali ne transformišu kovarijantno, možemo definisati kalibraciona <u>polja</u> (uporediti (10)) relacijama

$$R^{ij}{}_{kl} \hat{=} 2h_k{}^{[\mu} h_l{}^{\nu]} (A^{ij}{}_{\mu,\nu} + A^i{}_{l\nu} A^{lj}{}_\mu) \qquad (24)$$

$$C^i{}_{kl} \hat{=} -2\, h_k{}^{[\mu} h_l{}^{\nu]}\, b^i{}_\lambda\, b^m{}_\mu\, (h_m{}^\lambda{}_{,\nu} - A^n{}_{m\nu}\, h_n{}^\lambda) \qquad (25)$$

pomoću kojih možemo konstruisati Lagranžijan slobodnog gravitacionog polja, formirajući (kontrakcijom) različite invarijantne kombinacije. Najprostija takva mogućnost, koja nije postojala u slučaju unutrašnjih grupa, gde su prostorni indeksi i,j,k i grupni indeksi a,b,c bili esencijalno različiti, je:

$$L^g \hat{=} \frac{1}{2\varkappa}\, b\, R = \frac{1}{2\varkappa} \det(b^k{}_\mu)\, R^{ij}{}_{ij} \qquad (26)$$

($\varkappa$ je Ajnštajnova gravitaciona konstanta). Ovakav izbor Lagranžijana daje Ajnštajn-Kartanovu teoriju:

Uspostavimo sada vezu izmedju kalibracionih potencijala (polja) i standardnih geometrijskih objekata.[1] Tetradna polja uspostavljaju vezu izmedju Lorencovih i svetskih tenzora, tj. menjaju grčke i latinske indekse (i obrnuto). Pomoću njih možemo definisati <u>metrički tenzor</u>

$$g_{\mu\nu} \hat{=} b^k{}_\mu\, b_{k\nu} = \eta_{kl}\, b^k{}_\mu\, b^l{}_\nu \qquad (27)$$

koji odredjuje metrički element $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$. Pored

metrike, drugi fundamentalni objekat Rimanovih prostora je <u>afina koneksija</u>, koja definiše paralelni prenos vektora, i koja nije nužno simetrična

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \hat{=} -b^{i}{}_{\mu}(h_{i}{}^{\lambda}{}_{,\nu} - A^{k}{}_{i\nu}\, h_{k}{}^{\lambda}) \tag{28}$$

Veličine $R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}$ i $C^{\mu}{}_{\nu\rho}$, dobijene iz formula (24) i (25), nazivaju se tenzor krivine i torzija, respektivno. Veza krivine i koneksije ista je kao u standardnoj Ajnštajnovoj teoriji, u kojoj je torzija nula. Simetrični deo koneksije jednak je Kristofelovom simbolu konstruisanom pomoću metrike (27), dok je antisimetrični deo jednak torziji. U tome je i osnovna razlika Ajnštajnove i Ajnštajn-Kartanove teorije gravitacije.

Sa gledišta kalibracionih teorija Ajnštaj-Kartanova teorija je, u izvesnom smislu, "patološki slučaj", jer se polja $A^{ij}{}_{\mu}$ ne propagiraju, odnosno mogu biti eliminisana iz jednačina kretanja, o čemu će biti više reči u četvrtom delu.

II. HAMILTONOVA FORMULACIJA SISTEMA SA VEZAMA

Posmatrajmo, radi jednostavnosti, sistem sa konačnim brojem stepeni slobode, opisan koordinatama q_r. Pri standardnom prelazu sa Lagranževog na Hamiltonov formalizam pretpostavlja se da je Lagranžijan <u>nesingularan</u>, tako da sistem Ojler-Lagranževih jednačina možemo rešiti po ubrzanjima: $\det(\partial^2 L/\partial\dot{q}_r\, \partial\dot{q}_s) \neq 0$. Standardna definicija impulsa

$$p^r \hat{=} \partial L/\partial\dot{q}_r = f^r(q_s, \dot{q}_s) \qquad r,s = 1,\ldots, R \tag{1}$$

omogućava da brzine $\dot{q}_s$ izrazimo preko impulsa, tako da ih možemo eliminisati iz izraza

$$H(p,q) \hat{=} p^s\, \dot{q}_s - L(q, \dot{q}) \tag{2}$$

koji se naziva Hamiltonovom funkcijom sistema.

Kalibraciono invarijantne teorije, o kojima se govorilo u prethodnom odeljku, opisane su singularnim Lagranžijanima[8]. Da bismo ovakve teorije mogli kvantizirati, potrebno je prethodno dati njihovu Hamiltonovu formulaciju, a zatim primeniti postulate o kvantizaciji klasičnog sistema.

Pretpostavimo sada da je rang matrice D jednak N - M (r,s = 1,...,N). Tada sistem jednačina (1) ne možemo rešiti po svim brzinama, već postoji M <u>primarnih</u> veza izmedju impulsa i koordinata (koordinate ovde imaju ulogu parametara)

$$\phi_m(p,q) = 0 \qquad m = 1,\ldots,M\ ; \tag{3}$$

simbol "≐", tzv. slaba jednakost, treba da nas opomene da pri računanju Poasonovih zagrada

$$[A, B] \doteq \frac{\partial A}{\partial q_s}\frac{\partial B}{\partial p^s} - \frac{\partial A}{\partial p^s}\frac{\partial B}{\partial q_s} \qquad (4)$$

ne smemo funkcije $\phi_m(p,q)$ (levu stranu slabe jednakosti) zameniti nulom (desnom stranom slabe jednakosti) pre nego što izračunamo Poasonove zagrade.

Može se pokazati[2)] da kanonički Hamiltonijan, definisan relacijom (2), može i u slučaju postojanja veza (3) biti izražen kao funkcija koordinata i impulsa, tako da ne zavisi od brzina. Ovom izrazu možemo dodati linearnu kombinaciju primarnih veza sa proizvoljnim koeficijentima u^m :

$$H^T \doteq H + u^m \phi_m \qquad (5)$$

i tako dobiti tzv. totalni Hamiltonijan. Koristeći definiciju Poasonovih zagrada, jednačina kretanja za proizvoljnu dinamičku promenljivu $g(p,q)$ postaje:

$$\dot{g} = [g, H] + u^m[g, \phi_m] \doteq [g, H^T] \qquad (6)$$

Pošto primarne veze moraju biti očuvane u vremenu, dobijamo:

$$\dot{\phi}_m = [\phi_m, H] + u^{m'}[\phi_m, \phi_{m'}] \doteq 0 \quad , \qquad (7)$$

odnosno tzv. uslove konzistentnosti veza. Ako pretpostavimo da je početni Lagranžijan izabran tako da ne daje nekonzistentne jednačine, uslovi konzistentnosti (7) mogu se svesti na:

1) identitete $0 = 0$,

2) iz jednačina mogu ispasti nepoznate funkcije $u^{m'}$, tako da dobijamo nove, tzv. sekundarne veze

$$\chi_n(p,q) \doteq 0 \qquad (8)$$

3) iz preostalih jednačina sistema (7) možemo odrediti nepoznate funkcije $u = u(p,q)$.

I za sekundarne veze treba napisati uslove konzistentnosti; opet možemo dobiti identitete, odrediti neke od preostalih u-ova, ili dobiti novu grupu sekundarnih veza. Postupak se nastavlja i sa ovim vezama, itd., sve dok, na kraju, za poslednju grupu veza uslovi konzistentnosti ne daju identitete. Označimo sa $\phi_j \doteq 0$, $j = 1,\ldots,M+K=J$, sve veze koje smo tako dobili (ukupno ima K sekundarnih veza, $\phi_{M+1} \equiv \chi_1,\ldots, \phi_J \equiv \chi_K$; $J \leq N$); uslovi konzistentnosti za njih glase:

$$[\phi_j, H] + u^m [\phi_j, \phi_m] \doteq 0 \;, \quad m = 1,\ldots,M \;, \quad j = 1,\ldots,J \qquad (9)$$

Posmatrajmo samo one jednačine (9) koje služe za odredjivanje u-ova; vidimo da je sistem nehomogen po u-ovima, tako da je opšte rešenje sistema zbir partikularnog rešenja nehomogenog sistema (9) $U_{m(p,q)}$ i linearne kombinacije A nezavisnih rešenja homogenog sistema $u^m[\phi_j, \phi_m] \doteq 0$ (označimo ih sa $V_a{}^m$ $a = 1,\ldots A$) sa proizvoljnim koeficijentima v^a, dakle

$$u^m = U^m + v^a V_a{}^m \qquad a = 1,\ldots,A \qquad (10)$$

Ako ovaj izraz zamenimo u (5), vidimo da totalni Hamiltonijan možemo pisati u obliku:

$$H^T = H^I + v^a \phi_a \doteq (H + U^m \phi_m) + v^a (V_a^m \phi_m) , \qquad (11)$$

pri čemu su koeficijenti v^a sasvim proizvoljni (uslovi konzistentnosti veza zadovoljeni su za proizvoljne vrednosti v^a, što nije bio slučaj sa u^m), a veze ϕ_a i Hamiltonijan H^I su prve klase (što znači da "komutiraju" sa svim vezama u teoriji ϕ_j[2]). Veza druge klase je ona koja "ne komutira" bar sa jednom od veza ϕ_j. Razbijanje na veze prve i druge klase mnogo je bitnije, a nezavisno je od razbijanja na primarne i sekundarne veze.

Kao što je poznato, kvantizacija klasičnog sistema sastoji se u tome što dinamičke promenljive prelaze u hermitske operatore u nekom Hilbertovom prostoru (označavaćemo ih sa kapicom iznad slova), a Poasonove zagrade prelaze u komutatore operatora: $[g, f] = h \to [\hat{g}, \hat{f}] = i \hbar \hat{h}$, gde je $\hbar$ Plankova konstanta (mi koristimo prirodni sistem jedinica u kome je $\hbar = c = 1$). Vezama prve klase $\phi_j(p,q) \doteq 0$ ne možemo pridružiti operatorske identitete $\hat{\phi}_j(\hat{p},\hat{q}) = \hat{0}$, jer bismo uvek mogli naći neki operator koji ne komutira sa vezom $\hat{\phi}_j$, a komutira (naravno) sa nultim operatorom $\hat{0}$. Stoga veze prve klase možemo smatrati uslovima koje moraju zadovoljavati stanja fizičkog sistema $|\psi\rangle$, odnosno $\hat{\phi}_j |\psi\rangle = 0$. Da bi kvantizacija bila konzistentna, moramo obezbediti da za svake dve veze prve klase važi: $[\hat{\phi}_j, \hat{\phi}_j] |\psi\rangle = 0$. Ukoliko to nije moguće, takvu teoriju ne možemo uspešno kvantizirati[2].

Kod veza druge klase, ne samo da ne možemo pisati $\hat{\phi}_j = \hat{0}$, već ni $\hat{\phi}_j |\psi\rangle = 0$, jer po pretpostavci uvek postoji neka veza druge klase $\hat{\phi}_k$ koja ima nenultu Poasonovu zagradu sa vezom $\hat{\phi}_j$, tako

da je kontradikcija neizbežna. Naime, uvek postoji neki od vektora $|\psi\rangle$ takav da je: $0 \neq [\hat{\phi}_j, \hat{\phi}_k] |\psi\rangle = \hat{\phi}_j (\hat{\phi}_k |\psi\rangle) - \hat{\phi}_k (\hat{\phi}_j |\psi\rangle) = 0$. Da bismo razumeli kako treba rešiti ovaj problem, razmotrimo prost primer, kada imamo samo dve veze druge klase $\phi_1 \doteq q_1 \doteq 0$ i $\phi_2 \doteq p_1 \approx 0$. Očigledno, u ovom slučaju izbacili bismo promenljive q_1 i p_1 iz teorije i zadržali samo preostali skup koordinata i impulsa. Isto možemo postići i na sledeći način: redefinišimo Poasonove zagrade, tako da u sumi (4) s uzima vrednosti 2,3,...,R. Tada će svaka varijabla imati nultu Poasonovu zagradu sa vezama ϕ_1 i ϕ_2 , tako da ove veze možemo smatrati jakim: $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$. Jake veze nakon kvantiziranja prelaze u operatorske identitete $\hat{\phi}_1 = \hat{0}$ i $\hat{\phi}_2 = \hat{0}$, jer više nemamo problema sa komutiranjem.

Uopštenje ovog primera sastoji se u sledećem: izdvojimo sve veze druge klase od kojih ne možemo linearnim kombinacijama formirati veze prve klase $\phi_k^{II} \doteq 0$, pa formirajmo matricu M sa elementima:

$$M_{ij} \doteq [\phi_i^{II}, \phi_j^{II}] \qquad (12)$$

koje je nesingularna[2], tako da ima inverznu matricu C^{ij}. Zamenimo sada u teoriji Poasonove zagrade novim Dirakovim zagradama, definisanim izrazom

$$[g, f]^D \doteq [g, f] - [g, \phi_i^{II}] C^{ij} [\phi_j^{II}, f] \qquad (13)$$

što možemo učiniti, jer one očuvavaju jednačine kretanja[2]:

$$\dot{g} \doteq [g, H^T]^D \qquad (14)$$

Dirakove zagrade bilo koje dinamičke promenljive i veza druge klase su nula, tako da ih možemo smatrati jakim vezama. Kvantizacija se sastoji u tome što ćemo Dirakove zagrade zameniti komutatorima, a veze druge klase postaće operatorski identiteti.

Dirakove zagrade imaju veoma korisnu osobinu da ih ne moramo izračunati odjednom, kao u (13), već korak po korak. Možemo prvo izračunati preliminarne Dirakove zagrade, sa nekim podskupom veza druge klase, zatim sa sledećim podskupom veza naredne Dirakove zagrade, tako što će na desnoj strani (13) figurisati prethodne Dirakove zagrade. Proces se nastavlja sve dok ne iscrpemo sve veze druge klase. Konačne zagrade biće iste kao da smo ih izračunali odjednom, sa svim vezama druge klase. Ova iterativna osobina vrlo je korisna kada imamo veliki broj veza i kad je teško invertovati matricu M_{ij}, a biće iskorišćena u odeljcima IV i V i u Dodatku II.

Pošto u jednačinama kretanja za bilo koju varijablu g figuriše proizvoljne funkcije v^a, iz zadanih početnih uslova ne možemo dobiti jednoznačno rešenje za $g(t)$; to znači da je isto fizičko stanje sistema opisano čitavom klasom funkcija. Sličnu situaciju imamo u elektrodinamici, odnosno u svim kalibraciono invarijantnim teorijama, gde zbog invarijantnosti konačne teorije u odnosu na lokalizovanu grupu sve Ojler-Lagranževe jednačine nisu nezavisne, te ne možemo dobiti jednoznačno rešenje jednačina kretanja.[8] Pošto razlika primarnih i sekundarnih veza nije esencijalna (ona zavisi od izbora početnog Lagranžijana i može se promeniti dodavanjem totalnog izvoda po vremenu proizvoljne funkcije) prirodno je da Hamiltonijanu H^T dodamo i sekundarne veze

prve klase $\phi_b{}^I$ sa proizvoljnim koeficijentima v^b

$$H^E \hat{=} H^T + v^b \phi_b{}^I = H' + v^a \phi_a{}^I + v^b \phi_b{}^I \qquad (15)$$

čime dobijamo prošireni (extended) Hamiltonijan, koji je i finalni Hamiltonijan naše teorije. U njemu možemo zameniti jake veze, nakon definisanja Dirakovih zagrada, ako time dobijamo prostiji izraz.

Na kraju, napomenimo da je generalizacija na slučaj teorije polja neposredna[9]. U sledećem odeljku, kao i u Dodatku II, biće date odgovarajuće formule, jer ćemo mi Dirakov metod primeniti na slučaj Ajnštajn-Kartanove teorije u kome je materija opisana spinornim poljima.

III. VREMENSKI KALIBRACIONI USLOV I NEKI OPŠTI ZAKLJUČCI O HAMILTONOVOJ FORMULACIJI POENKARE INVARIJANTNIH KALIBRACIONIH TEORIJA

Kao što je jasno iz prvog odeljka ovog rada, kalibraciono invarijantne teorije formulisane su kompletno u Lagranževom formalizmu. Poželjno je ispitati kako se, pri lokalizaciji Poenkareove grupe simetrije, menja Hamiltonova formulacija ovih teorija. Pretpostavimo stoga da nam je poznat početni Lagranžijan $L'^{m} \hat{=} L'^{m}(u, \partial_k u)$, invarijantan u odnosu na Poenkareovu grupu. Sa "$'$" ćemo označavati sve veličine koje se odnose na sistem pre lokalizacije grupe. Takodje ćemo usvojiti konvenciju: da početna slova latinske i grčke azbuke budu prostorni indeksi $a,b,c,d = 1,2,3$ i $\alpha,\beta,\gamma,\delta = 1,2,3$ Lorencovih i svetskih tenzora respektivno, dok ćemo, kao i ranije, dopustiti da slova iz sredine azbuka uzimaju sve četiri vrednosti.

Pretpostavimo da je za ovaj Lagranžijan sprovedena Dirakova procedura. Iz definicije impulsa:

$$\pi' \hat{=} \partial L'^{m}/\partial u_{,0} = \pi'(u, \partial_k u) \qquad (1)$$

slede primarne veze

$$\phi'_m(u, \partial_a u, \pi', \partial_a \pi') = 0 \qquad (2)$$

Primetimo da se u vezama (2) pojavljuju prostorni izvodi polja i impulsa, a oni su analogni razlici koordinata (impulsa) u istom trenutku vremena u slučaju teorije sa konačnim brojem stepeni

slobode. Dakle, prostorni izvodi polja (impulsa) ne zavise od brzina (izvoda impulsa po vremenu).

Gustina kanoničkog Hamiltonijana definisana je izrazom

$$\mathcal{H}' \hat{=} \pi' u_{,0} - \mathcal{L}' = \mathcal{H}'(u, \partial_a u, \pi') \qquad (3)$$

dok je sam kanonički Hamiltonijan dat integralom

$$H' \hat{=} \int \mathcal{H}' d^3x \, . \qquad (4)$$

Totalna gustina Hamiltonijana i totalni Hamiltonijan su

$$\mathcal{H}^{T\prime} \hat{=} \mathcal{H}' + u^m \phi'_m \qquad H^{T\prime} \hat{=} \int \mathcal{H}^{T\prime} d^3x \qquad (5)$$

Iz definicije Poasonovih zagrada (2.4) slede uopštenjem na ∞ broj stepeni slobode <u>osnovne</u> Poasonove zagrade:

$$[u^r(t,\vec{x}), \pi'_s(t,\vec{y})] = \delta^r{}_s \, \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \, , \qquad (6)$$

gde su u^r elementi vektor kolone u, π'_s elementi vrste π', a $\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ trodimenzionalna Dirakova delta funkcija. Jednačine kretanja za proizvoljnu varijablu g su

$$\partial g(t,\vec{x})/\partial t = [g(t,\vec{x}), H'] + \int u^m(t,\vec{y}) \, [g(t,\vec{x}), \phi'_m(t,\vec{y})] d^3y$$
$$= [g(t,\vec{x}), H^{T\prime}]$$

Iz uslova konzistentnosti primarnih veza dobijamo sekundarne veze i možemo odrediti neke funkcije $u^m(x)$. Kao i u slučaju sistema sa konačnim brojem stepeni slobode, sve veze možemo podeliti na

veze prve i druge klase. Koristeći rešenja za u-ove, totalni Hamiltonijan možemo pisati u obliku

$$H^{T'} = H^{I'} + v^a \phi'_a \, , \tag{8}$$

gde su H^I i ϕ'_a veličine prve klase definisane formulom (2.11). Dirakove zagrade definisane su analogno formulama (2.12-13) i date su u Dodatku II formulama (D.II.7-9).

Pretpostavimo sada da smo početni Lagranžijan L' učinili invarijantnim u odnosu na lokalizovanu Poenkareovu grupu, tako što smo definisali novi Lagranžijan formulom:

$$L^m \hat{=} b\, L'(u, D_k u) = L^m(u, \partial_k u, h_k{}^\mu, A^{ij}{}_\mu) \, , \tag{9}$$

pri čemu je na osnovu formula (1,18) i (1,23)

$$D_k u \hat{=} h_k{}^\mu \, (u_{,\mu} + \frac{1}{2} A^{ij}{}_\mu \, S_{ij} \, u) \tag{10}$$

a S_{ij} su generatori posmatrane reprezentacije Lorencove grupe. Lagranžijan slobodnog gravitacionog polja za sada nećemo precizirati (tj. nećemo se odmah ograničiti na Ajnštajn-Kartanovu teoriju). O njemu jedino znamo da od potencijala A i h može zavisiti samo preko krivine R i torzije C (koje su date formulama (1.24-25)):

$$L = L^m + L^g \qquad L^g = L^g(R^{ij}{}_{kl}, C^i{}_{jk}) \tag{11,12}$$

Postavićemo sada sebi sledeći zadatak: ispitati kakvog je oblika Hamiltonijan koji odgovara Lagranžijanu (11), kakva je njegova

veza sa Hamiltonijanom (5) i šta se može generalno reći o vezama ovakve teorije.

Pre nego što odgovorimo na ova pitanja, napomenimo da u Hamiltonovom formalizmu, za razliku od Lagranževog, vreme ima izdvojenu ulogu u odnosu na prostorne koordinate. Sve dok se služimo Lorencovim (ortogonalnim) lokalno inercijalnim sistemima, nulta koordinata ima smisao vremena u odgovarajućem sistemu. S druge strane, u opštim koordinatnim sistemima sve koordinate su ravnopravne, pa nulta koordinata ne mora imati smisao vremena. Pošto želimo da zadržimo izdvojenu ulogu vremena, radićemo samo sa onom klasom generalnih koordinatnih sistema u kojima je nulta koordinata $x^{\mu=0}$ zavisna samo od vremena u Lorencovom sistemu $x^{k=0}$, tako da ne zavisi od prostornih Lorencovih koordinata x^a ; drugim rečima, nametnućemo uslov na tetradna polja:

$$\frac{\partial x^0}{\partial x^a} = h_a{}^0 = 0 \tag{13}$$

Geometrijskim rečnikom (koji mi maksimalno izbegavamo, jer u gravitaciji vidimo pre fizičko polje nego geometriju), fiksirali smo vremensku "nogu" tetrade ("četvoropoda") tako da se poklapa sa normalom na hiperpovrši $x^{\mu=0} = \text{const}$[3]. Posledica ovog vremenskog kalibracionog uslova (time gauge) biće proporcionalnost impulsa polja materije pre i nakon lokalizacije Poenkareove grupe (up. formulu (19) niže).

Navedimo nekoliko formula koje su posledica uslova (13) i koje će biti od velike koristi u daljim računima. Inverzna tetradna polja $b^k{}_0$ i $b^0{}_a$ mogu preko relacija (1.22) biti izražena preko tetrada formulama

$$b^o{}_o = 1/h_o{}^o \qquad b^o{}_\alpha = 0 \qquad b^a{}_o = -b^o{}_o\, b^a{}_\alpha\, h_o{}^\alpha \,, \tag{14}$$

dok su polja $b^a{}_\alpha$ inverzna poljima $h_b{}^\beta$

$$h_a{}^\alpha\, b^a{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta \qquad h_a{}^\alpha\, b^b{}_\alpha = \delta^b{}_a \tag{15}$$

Determinanta b ima blok dijagonalnu formu:

$$b = \det\,(b^k{}_\mu) = b^o{}_o \det\,(b^a{}_\alpha) \hat{=} b^o{}_o\, K \,, \tag{16}$$

dok su nulti i prostorni kovarijantni izvodi dati formulama

$$D_a u = h_a{}^\alpha\,(u,_\alpha + \frac{1}{2} A^{ij}{}_\alpha\, S_{ij} u) \tag{17}$$

$$D_o u = h_o{}^o\,(u,_o + \frac{1}{2} A^{ij}{}_o\, S_{ij} u) + h_o{}^\alpha\, b^a{}_\alpha\, D_a u \tag{18}$$

Primetimo važnu činjenicu, posledicu vremenskog kalibracionog uslova, da prostorni kovarijantni izvodi $D_a u$ ne zavise od brzina polja materije $u,_o$. Ovu činjenicu iskoristićemo da povežemo nove impulse polja materije u gravitacionom polju π, sa impulsima slobodnog polja materije π'

$$\pi \hat{=} \partial L/\partial u,_o = \partial L^m/\partial u,_o = \frac{\partial(b\, L'(u,\, D_k u))}{\partial(D_o u)}\ \frac{\partial(D_o u)}{\partial u,_o}$$

$$= b^o{}_o\, K\, \pi'(u, D_k u)\, h_o{}^o = K\, \pi'(u,\, D_k u)$$

odnosno

$$\pi(u,\, u,_k,\, h_k{}^\mu,\, A^{ij}{}_\nu)/K = \pi'(u,\, D_k u) \tag{19}$$

Vidimo da nove impulse polja materije u gravitacionom polju

možemo dobiti iz starih (1) zamenom običnih impulsa kovarijantnim i množenjem sa K. Odatle odmah zaključujemo da i primarne veze možemo izraziti preko starih veza (2) formulom

$$\phi_m(u,\, \partial_a u, \pi,\, \partial_a \pi,\, h,\, A) = \phi'_m(u,\, D_a u,\, \pi/K,\, D_a\,(\pi/K)) \tag{20}$$

Ostale primarne veze i impulsi zavise od konkretnog izbora Lagranžijana (12). Medjutim, i o njima možemo odmah nešto zaključiti. Pored polja materije nama su osnovne promenljive i potencijali $h_a{}^\alpha$, $h_o{}^\mu$ i $A^{ij}{}_\mu$ tako da ćemo sve impulse u teoriji definisati formulom

$$\delta L = \pi \delta u,_o + \pi^a{}_\alpha\, \delta h_a{}^\alpha,_o + \pi^o{}_\mu\, \delta h_o{}^\mu,_o + \pi_{ij}{}^\mu\, \delta A^{ij}{}_\mu,_o \tag{21}$$

Primetimo prvo da izvodi tetradnih polja figurišu samo u L^g i to samo preko torzije $C^i{}_{jk}$ jer krivina ne sadrži izvode $h_k{}^\mu,_\nu$. Koristeći formulu (1.25), sabirak u torziji koji zavisi od brzina, $C^i{}_{jk}(h,_o)$ je

$$C^i{}_{jk}(h,_o) = 2\, b^i{}_\lambda\, h_{[j}{}^o\, h_{k]}{}^\lambda,_o \tag{22}$$

tako da korišćenjem vremenskog kalibracionog uslova (13) dobijamo da torzija ne zavisi od brzina $h_o{}^\mu,_o$ odnosno

$$C^i{}_{ab}(h,_o) = 0 \qquad C^i{}_{ao}(h,_o) = -h_o{}^o\, b^i{}_\alpha\, h_a{}^\alpha,_o \tag{23,24}$$

tako da ni L^g ne zavisi od brzina $h_o{}^\mu,_o$. Odatle odmah dobijamo 4 primarne veze

$$\phi^o{}_\mu = \pi^o{}_\mu \approx 0 \tag{25}$$

S druge strane, izvodi A-potencijala javljaju se samo u krivini; no zbog antisimetričnosti po μ i ν u formuli (1.24) vidimo da brzine $A^{ij}{}_{o,o}$ otpadaju iz izraza za tenzor krivine, tako da dobijamo još 6 primarnih veza:

$$\phi_{ij}{}^{o} \hat{=} \pi_{ij}{}^{o} = 0 \qquad (26)$$

Zaključci o vezama (25) i (26) važe bez obzira na konkretan izbor Lagranžijana L^g i mogu biti jedino narušeni dodavanjem neke 4-divergencije Lagranžijanu $L^g(R^{ij}{}_{kl}, C^i{}_{jk})$. Mi ćemo nadalje predpostaviti, da i kad dodamo neku 4-divergenciju, ona mora biti takva da novi Lagranžijan ne sadrži brzine $h_o{}^{\mu}{}_{,o}$ i $A^{ij}{}_{o,o}$.

O rešivosti jednačina za impulse $\pi^k{}_\alpha$ i $\pi_{ij}{}^{\alpha}$ po brzinama, kao i o eventualnim novim primarnim vezama, ne možemo reći ništa sve dok ne izaberemo konkretan oblik L^g; no i iz ovih veza možemo izvući dosta informacija o obliku Hamiltonijana i o sekundarnim vezama.

Pošto je interakcija izmedju polja materije i gravitacije dobijena zamenom običnog izvoda kovarijantnim (minimal coupling), tako da Lagranžijan L^m dat formulom (9) ne sadrži izvode potencijala A i h, kanonička gustina Hamiltonijana biće jednaka zbiru gustina Hamiltonijana H^m i H^g koje su dobijene, respektivno, iz L^m i L^g:

$$H = H^m + H^g = (\pi\, u_{,o} - L^m) + (\pi^k{}_\mu\, h_k{}^{\mu}{}_{,o} + \pi_{ij}{}^{\mu} A^{ij}{}_{\mu,o} - L^g) \qquad (27)$$

Pozabavimo se detaljnije gustinom Hamiltonijana materije u

gravitacionom polju H^m i povežimo ga sa H':

$$H^m = \pi\, u_{,o} - L^m = K\, \pi'(u, D_k u)\, u_{,o} - b\, L'(u, D_k u)$$

Zamenimo u poslednjoj formuli $u_{,o}$ iz formule (18):

$$H^m = b\, (\pi'(u, D_k u)\, D_o u - L'(u, D_k u)) -$$

$$- (b^o{}_o\, K)\, \pi'(u, D_k u) (\tfrac{1}{2}\, h_o{}^{o}\, A^{ij}{}_o\, S_{ij}\, u + h_o{}^{\alpha}\, b^a{}_\alpha\, D_a u) \qquad (28)$$

Uzimajući u obzir vezu impulsa (19) i definiciju gustine Hamiltonijana materije pre lokalizacije grupe (3), prvi sabirak jednak je $b\, H'(u, D_a u, \pi/K)$; drugim rečima, on se automatski dobija iz H' zamenom običnih prostornih izvoda kovarijantnim, starih impulsa sa π/K i množenjem sa b. Uzimajući u obzir izdvojenu ulogu promenljivih $h_o{}^{\mu}$ i $A^{ij}{}_o$, čiji su impulsi nula, a daju primarne veze (25) i (26), pogodno je H^m pisati u obliku

$$H^m = b^o{}_o\, H^{ml} + b^o{}_o\, h_o{}^{\alpha}\, H^m{}_\alpha + A^{ij}{}_o\, H_{ij} \qquad (29)$$

gde su veličine H^{ml}, $H^m{}_\alpha$ i $H^m{}_{ij}$ date izrazima

$$H^{ml} \hat{=} K\, H'(u, D_a u, \pi/K) \qquad (30)$$

$$H^m{}_\alpha \hat{=} -\pi\, b^a{}_\alpha\, D_a u = -\pi (u_{,\alpha} + \tfrac{1}{2} A^{ij}{}_\alpha\, S_{ij} u) \qquad (31)$$

$$H^m{}_{ij} \hat{=} (-1/2)\, \pi\, S_{ij}\, u \qquad (32)$$

i ne zavise od $h_o{}^{\mu}$ i $A^{ij}{}_o$ već samo od ostalih promenljivih.

Do iste strukture Hamiltonijana može se doći i geometrijskim argumentima koje je dao Dirak[10]. Identifikaciju formula lako uspostavljamo pomoću veze

$$h_o{}^{\mu} = g^{o\mu}/(g^{oo})^{1/2} \quad ,$$

gde je g standardni metrički tenzor. U pomenutom radu nije data eksplicitna struktura izraza H^{ml}, $H^{m}{}_{\alpha}$, i $H^{m}{}_{ij}$, tako da na formule (30-32) možemo gledati kao na dopunu Dirakovih opštih rezultata.

U narednom odeljku pokazaćemo da i gravitacioni deo Lagranžijana, koji odgovara Ajnštajn-Kartanovoj teoriji, ima (do na 3-divergenciju) istu formu.

IV. SLUČAJ AJNŠTAJN-KARTANOVE TEORIJE

Izaberimo sada najprostiji mogući oblik Lagranžijana slobodnog gravitacionog polja:

$$L^{g} \hat{=} (b/2\varkappa)\, R \qquad\qquad R = R^{ij}{}_{ij} \ , \tag{1}$$

gde je $\varkappa$ Ajnštajnova gravitaciona konstanta, a skalarna krivina R dobija se kontrakcijom iz (1.24):

$$L^{g}(h, A, \partial A) = (b/\varkappa)\, h_i{}^{[\mu} h_j{}^{\nu]} (A^{ij}{}_{\mu,\nu} + A^{i}{}_{k\nu} A^{kj}{}_{\mu}) \tag{2}$$

Primetimo da je Lagranžijan (2) linearan i nehomogen po brzinama $A^{ij}{}_{\mu,o}$ i ne zavisi od brzina $h_k{}^{\mu}{}_{,o}$. Odatle sledi da su svi impulsi $\pi_{ij}{}^{\mu}$ i $\pi^{k}{}_{\mu}$ funkcije potencijala A i h, odnosno da je broj primarnih veza jednak broju impulsa. Zbog tako velikog broja primarnih veza, pogodno je da što više njih bude prostog oblika, npr. $\pi = 0$. Taj cilj postići ćemo ako izvode prebacimo sa A-potencijala na tetrade kojih je manje. Definišimo stoga novi Lagranžijan, koji se od početnog Lagranžijana (2) razlikuje za pogodno izabranu 4-divergenciju (koja ne utiče na Ojler-Lagranževe jednačine kretanja) a ne sadrži brzine $A^{ij}{}_{\mu,o}$:

$$L^{g}(h, \partial h, A) \hat{=} L^{g}(h, A, \partial A) - \frac{1}{\varkappa} (b\, h_i{}^{[\mu} h_j{}^{\nu]} A^{ij}{}_{\mu})_{,\nu}$$

$$= \frac{1}{\varkappa} \left[(b\, h_i{}^{[\mu} h_j{}^{\nu]})_{,\nu} A^{ij}{}_{\mu} + b\, h_i{}^{[\mu} h_j{}^{\nu]} A^{i}{}_{k\nu} A^{kj}{}_{\mu} \right] \tag{3}$$

Pokazaćemo da ova 4-divergencija neće narušiti naše opšte zaključke o primarnim vezama (3.25) i (3.26), tj. da L^{g} ne zavisi

od $A^{ij}{}_{o,o}$ i $h_o{}^{\mu}{}_{,o}$. Mi ćemo na dalje raditi sa Lagranžijanom (3). Pored gore navedenog tehničkog razloga, za to postoji i sledeći argumenat. Kao što je poznato[1], potencijali A nisu prave dinamičke promenljive; ukoliko je L^m linearan po u, iz Ojler-Lagranževih jednačina kretanja možemo izraziti A-potencijale u funkciji polja materije i tetrada i njihovih izvoda $A = f(u, \partial u, h, \partial h)$. Postavlja se pitanje: smemo li ove izraze zameniti u početni Lagranžijan i time eliminisati A-potencijale iz teorije

$$\underline{L}(u, \partial u, h, \partial h) \hat{=} L(u, \partial u, h, \partial h, f, \partial f) \qquad (4)$$

tako da jednačine kretanja za preostale promenljive budu očuvane, odnosno da važi

$$\begin{array}{lcl} \delta\underline{L}/\delta h = 0 & \Longleftrightarrow & (\delta L/\delta h)\,|_{A=f} = 0 \\ \delta\underline{L}/\delta u = 0 & & (\delta L/\delta u)\,|_{A=f} = 0 \end{array} \qquad (5)$$

Odgovor na ovo pitanje je potvrdan u slučaju da Lagranžijan L ne zavisi od izvoda A-potencijala[11]. Ovaj problem poznat je i u standardnoj, Ajnštajnovoj teoriji gravitacije, gde ulogu A i h preuzimaju koneksije Γ i metrika g i gde je takodje pokazana ekvivalentnost oba načina (tzv. formalizmi prvog odnosno drugog reda). Za Lagranžijan $\underline{L}$ sprovedena je Dirakova procedura[4]. Mi ćemo zato raditi sa Lagranžijanom (3), na koji je primenljiv gornji teorem, želeći da proverimo rezultate dobijene u pomenutom radu, posebno pitanje da li zamena (4) utiče na Dirakove zagrade za preostale varijable teorije.

Na kraju ove diskusije napomenimo da doprinos 4-divergencije Hamiltonijanu može biti netrivijalan, jer tetradna polja ne moraju iščezavati na beskonačnosti (u ravnom prostoru one su Kronekerove delta funkcije). Ovaj problem diskutovaćemo detaljnije kada izvršimo Hamiltonovu formulaciju teorije, gde će aposteriori biti opravdano dodavanje ove 4-divergencije. Posle ove digresije, pozabavimo se detaljnije Lagranžijanom (3); korišćenjem formule za izvod determinante

$$b_{,\mu} = [\det(b^k{}_\nu)]_{,\mu} = -b\, b^k{}_\nu\, h_k{}^\nu{}_{,\mu} \qquad (6)$$

njega možemo prepisati u obliku

$$L^g = \frac{b}{\varkappa}\Big[h_i{}^{[\mu}\, h_j{}^{\nu]}\, (A^{ij}{}_\mu\, b^k{}_\rho\, h_k{}^\rho{}_{,\nu} + A^i{}_{k\nu}\, A^{kj}{}_\mu)$$

$$- (h_{[i}{}^\mu\, h_{j]}{}^\nu)_{,\nu}\, A^{ij}{}_\mu\Big] \qquad (7)$$

Lagranžijan (7) može se napisati kao zbir Lagranžijana

$$L^g = L^g(1) + L^g(0) \qquad (8)$$

gde je $L^g(1)$ linearan i homogen po brzinama tetrada

$$L^g(q) = \frac{b}{\varkappa}\Big[h_i{}^{[\mu}\, h_j{}^{o]}\, b^k{}_\rho\, h_k{}^\rho{}_{,o} - (h_{[i}{}^\mu\, h_j{}^o{}_{]})_{,o}\Big]\, A^{ij}{}_\mu \qquad (9)$$

dok $L^g(0)$ ne zavisi od brzina i može se dobiti iz (7) zamenom indeksa μ sa α osim u sabirku kvadratičnom po A.

Iz definicije impulsa (3.21) vidimo da je $L^g(1) = \pi^k{}_\mu\, h_k{}^\mu{}_{,o} + \pi_{ij}{}^\mu\, A^{ij}{}_\mu$ tako da je kanonički Hamiltonijan

$$H^g = \pi^k{}_\mu \, h_k{}^\mu{}_{,o} + \pi_{ij}{}^\mu \, A^{ij}{}_\mu - L^g(1) - L^g(0) = -L^g(0), \qquad (10)$$

jednak nehomogenom delu Lagranžijana sa suprotnim znakom.

Ako sad iskoristimo vremenski kalibracioni uslov (3.13), za linearni deo Lagranžijana dobijamo izraz:

$$L^g(1) = \frac{K}{\varkappa} \left(h_a{}^\alpha \, b^b{}_\beta - \delta^b{}_a \, \delta^\alpha{}_\beta\right) A^{ao}{}_\alpha \, h_b{}^\beta{}_{,o} \, , \qquad (11)$$

dok nakon dužeg računa kanonički Hamiltonijan (odnosno $-L^g(0)$) možemo napisati u obliku

$$H^g = b^o{}_o \, H^{g1} + b^o{}_o \, h_o{}^\alpha \, H^g{}_\alpha + A^{ij}{}_o \, H^g{}_{ij} + D^\alpha{}_{,\alpha} \qquad (12)$$

gde veličine H^{g1}, $H^g{}_\alpha$, $H^g{}_{ij}$ ne zavise od $h_c{}^\mu$ i $A^{ij}{}_c$ i date su formulama

$$H^{g1'} = \frac{K}{\varkappa} \, h_a{}^{[\alpha} \, h_b{}^{\beta]} \left(A^{ab}{}_{\beta,\alpha} + A^a{}_{k\alpha} \, A^{kb}{}_\beta\right) \qquad (13)$$

$$H^g{}_\beta = 2 \, \frac{K}{\varkappa} \, h_a{}^\alpha \left(A^{ao}{}_{[\beta,\alpha]} + A^a{}_{b[\alpha} A^{bo}{}_{\beta]}\right) \qquad (14)$$

$$H^g{}_{oa} = \frac{K}{\varkappa} \left(h_a{}^\alpha{}_{,\alpha} + h_a{}^\alpha \, K_{,\alpha}/K - h_b{}^\alpha \, A^b{}_{a\alpha}\right) \qquad (15)$$

$$H^g{}_{ab} = \frac{K}{\varkappa} \, h_{[a}{}^\alpha \, A^o{}_{b]\alpha} \qquad (16)$$

dok je 3-divergencija $D^\alpha{}_{,\alpha}$ data formulom

$$D^\alpha{}_{,\alpha} = \left[\frac{K}{\varkappa} \, b^o{}_o \left(2 \, h_a{}^{[\alpha} \, h_o{}^{\beta]} \, A^{oa}{}_\beta + h_a{}^\alpha \, h_b{}^\beta \, A^{ba}{}_\beta\right)\right]_{,\alpha} \qquad (17)$$

Potražimo sada primarne veze; iz definicije impulsa $\pi^a{}_\alpha$ koji odgovara $h_a{}^\alpha$ odmah dobijamo

$$\pi^b{}_\beta = (K/\varkappa)\left(h_a{}^\alpha \, b^b{}_\beta - \delta^b{}_a \, \delta^\alpha{}_\beta\right) A^{ao}{}_\alpha \qquad (18)$$

Pogodno je ove veze rešiti po $A^{ao}{}_\alpha$. Množenjem sa $h_b{}^\beta$ cele jednačine dobijamo

$$h_a{}^\alpha \, A^{ao}{}_\alpha = (\varkappa/2K) \, \pi^b{}_\beta \, h_b{}^\beta$$

pa zamenom nazad u (18) dobijamo rešenje

$$A^{bo}{}_\beta = (-\varkappa/K)\left(\pi^b{}_\beta - \frac{1}{2} \, b^b{}_\beta \, h_a{}^\alpha \, \pi^a{}_\alpha\right) \qquad (19)$$

Mi ćemo na dalje umesto (18) koristiti primarne veze (19) koje su pogodnije (a ekvivalentne vezama (18)) za konstrukciju Dirakovih zagrada i eliminaciju A-potencijala iz teorije. Označimo ove veze na sledeći način

$$\phi^b{}_\beta \doteq A^{bo}{}_\beta + (\varkappa/K)\left(\pi^b{}_\beta - \frac{1}{2} \, b^b{}_\beta \, h_a{}^\alpha \, \pi^a{}_\alpha\right) = 0 \qquad (20)$$

Pošto Lagranžijan (11) ne zavisi od brzina A-potencijala i brzina tetrada, odmah dobijamo i ostale primarne veze

$$\phi^o{}_\mu \doteq \pi^o{}_\mu = 0 \qquad \phi_{ij}{}^\mu = \pi_{ij}{}^\mu = 0 \qquad (21{,}22)$$

koje potiču od gravitacionog dela Lagranžijana (up. (3.25-26)). Zajedno sa vezama ϕ_m koje potiču od materije (up. (3.20)) time smo dobili sve primarne veze Ajnštajn-Kartanove teorije.

Totalna gustina Hamiltonijana data je uobičajenom formulom

$$H^T = H^m + H^g + u_b{}^\beta \, \phi^b{}_\beta + u_o{}^\mu \, \pi^o{}_\mu + u^{ij}{}_\mu \, \pi_{ij}{}^\mu + u^m \, \phi_m \qquad (23)$$

gde su gustine Hamiltonijana H^m i H^g dati formulama (3.29-32) i (12-17) respektivno a veze ϕ_m formulom (3.20). Pre nego što ispitamo uslove konzistentnosti primarnih veza (20-22), navedimo da osnovne Poasonove zagrade u našem slučaju glase

$$[h_k{}^\mu(x),\ \pi^n{}_\nu(x')] = \delta_k{}^n\ \delta_\mu{}^\nu\ \delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (24)$$

$$[A^{ij}{}_\mu(x),\ \pi_{kl}{}^\nu(x')] = \delta^{[i}{}_k\ \delta^{j]}{}_l\ \delta^\nu{}_\mu\ \delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (24')$$

$$[u^r(x), \pi_s(x')] = \delta^r{}_s \delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (24'')$$

pri čemu je $x^o = x'^o$. Na dalje ćemo koristiti kondenzovanu notaciju, tako da ćemo umesto (24') pisati

$$[A^{ij}{}_\mu,\ \pi'_{kl}{}^\nu] = \delta^{[ij]}_{kl}{}^\nu_\mu\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

Uslove konzistentnosti primarnih veza $\partial\phi_m(t,\vec{x})/\partial t \approx 0$ slično formuli (7) možemo pisati u obliku

$$\int u'^{\bar{m}}\ [\phi_{\bar{n}},\ \phi'_{\bar{m}}]\quad d^3\vec{x}' + [\phi_{\bar{n}},\ \mathbb{H}] \approx 0 \qquad (25)$$

odakle vidimo da je za ispitivanje ovog sistema prvo potrebno naći Poasonove zagrade izmedju primarnih veza (indeksi $\bar{m}$ i $\bar{n}$ u gornjoj formuli prebrojavaju sve primarne veze). Pošto veze materije (3.20) zavise od potencijala samo preko prostornih kovarijantnih izvoda u kojima ne figurišu potencijali $A^{ij}{}_o$ i $h_o{}^\mu$ (up. (3.17)), a ni u vezama (20-22) se ne pojavljuju ove veličine, impulsi $\pi^{ij}{}_o$ i $\pi^o{}_\mu$ imaće nulte Poasonove zagrade sa svim primarnim vezama, dakle

$$[\phi^o{}_\mu,\ \phi'_{\bar{m}}] = [\phi_{ij}{}^o,\ \phi'_{\bar{m}}] = 0\ , \qquad (26)$$

tako da će uslovi konzistentnosti veza $\phi^o{}_\mu$ i $\phi_{ij}{}^o$ dati sekundarne veze

$$[\pi^o{}_\mu,\ \mathbb{H}] \approx 0 \qquad [\pi_{ij}{}^o,\ \mathbb{H}] \approx 0 \qquad (27,28)$$

Pre nego što ih eksplicitno izračunamo podsetimo se da kanoničku gustinu Hamiltonijana možemo pisati u obliku

$$H = b^o{}_o\ H^1 + b^o{}_o\ h_o{}^\alpha\ H_\alpha + A^{ij}{}_o\ H_{ij} + D^\alpha{}_{,\alpha} \qquad (29)$$

(uporediti formule (3.29-32),(3.27) i (12-17), pri čemu veličine $H^1 = H^{g1} + H^{m1}$, $H_\alpha = H^m{}_\alpha + H^g{}_\alpha$ i $H_{ij} = H^m{}_{ij} + H^g{}_{ij}$ ne zavise od $A^{ij}{}_o$ i $h_o{}^\mu$. Koristeći formulu za Poasonove zagrade inverznih tetradnih polja i impulsa

$$[\pi^k{}_\mu,\ b'^l{}_\nu] = b^k{}_\nu\ b^l{}_\mu\ \delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (30)$$

(koju dobijamo iz (24) i relacija ortogonalnosti (3.14-15)), kao i činjenicu da 3-divergencija ne utiče na Poasonove zagrade dobijamo

$$[\pi_{ij}{}^o,\ \mathbb{H}] = \int [\pi_{ij}{}^o,\ A'^{lk}{}_o] H'_{lk}\ d\vec{x}' = \delta^{[lk]}_{ij}\ H_{ik} = H_{ij}$$

odnosno sekundarne veze (28) su eksplicitno

$$\chi_{ij} \hat{=} H_{ij} \approx 0 \qquad (31)$$

Analogno dobijamo i veze (27)

$$[\pi^o{}_o,\ \mathbb{H}] = \int [\pi^o{}_o,\ b'^o{}_o]\ (H'^1 + h'^\alpha_o\ H'_\alpha)\ d\vec{x}' =$$

$$= (b^o{}_o)^2\ (H^1 + h_o{}^\alpha\ H_\alpha) \approx 0 \qquad (32)$$

$$[\pi^{o}{}_{\alpha}, H] = \int [\pi^{o}{}_{\alpha}, h_{o}^{\prime\beta}]\, b^{\prime o}{}_{o}\, H'_{\beta} d\vec{x}' = -b^{o}{}_{o} H_{\alpha} \approx 0 \qquad (33)$$

Kako je $b^{o}{}_{o} \neq 0$ (inače početni Lagranžijani (3.9) i (1) postaju jednaki nuli) umesto veza (32) i (33) možemo uzeti njihovu linearnu kombinaciju, tako da ćemo za sekundarne veze uzeti prostije izraze

$$\chi^1 \hat{=} H^1 = H^{m1} + H^{g1} \approx 0 \qquad \chi_\alpha \hat{=} H_\alpha = H^m{}_\alpha + H^g{}_\alpha \approx 0 \qquad (34,35)$$

Predjimo sada na uslove konzistentnosti veza $\pi_{ij}{}^{\alpha} \approx 0$. Pošto u vezama materije figurišu odgovarajući potencijali $A^{ij}{}_{\alpha}$, preko prostornih kovarijantnih izvoda, teško je izvršiti opštu analizu bez konkretnog poznavanja ovih veza. Predpostavimo zato da veze materije ne zavise od prostornih izvoda polja i impulsa odnosno da su oblika (upor. (3.20))

$$\phi_m(u, \pi, h_a{}^\alpha) = \phi'(u, \pi/K) \qquad (36)$$

U tom su slučaju Poasonove zagrade impulsa $\pi_{ij}{}^\alpha$ i veza materije nula. Pošto ni u ostalim primarnim vezama ne figurišu potencijali $A^{ab}{}_\alpha$, uslovi konzistentnosti za $\phi_{ab}{}^\alpha$ daju takodje sekundarne veze

$$\chi_{ab}{}^\alpha \hat{=} [\pi_{ab}{}^\alpha, H] \approx 0 \qquad (37)$$

koje će kasnije biti eksplicitno izračunate i rešene po potencijalima $A^{ab}{}_\alpha$. Od svih primarnih veza $\pi_{ij}{}^{\alpha} \approx 0$ ostale su nam još veze $\pi_{ao}{}^\alpha \approx 0$. Na osnovu formula (24) jedine nenulte Poasonove zagrade sa primarnim vezama su

$$[\pi_{ao}{}^\alpha, \phi^{\prime b}{}_\beta] = [\pi_{ao}, A^{\prime bo}{}_\beta] = (-1/2)\,\delta^{b\alpha}_{a\beta}\,\delta(\vec{x} - \vec{x}') \qquad (38)$$

tako da uslovi konzistentnosti za $\phi_{ao}{}^\alpha$ daju relacije

$$0 \approx \int [\pi_{ao}{}^\alpha, \phi^{\prime b}{}_\beta]\, u_b^{\prime\beta}\, d\vec{x}' + [\pi_{ao}{}^\alpha, H] = -\frac{1}{2} u_a{}^\alpha + [\pi_{ao}{}^\alpha, H]$$

kojemožemo eksplicitno rešiti po $u_a{}^\alpha$ i dobiti

$$U_a{}^\alpha = 2[\pi_{ao}{}^\alpha, H] \qquad (39)$$

Time smo potvrdili opšte pravilo da je uvek moguće odrediti u-ove uz primarne veze druge klase. Veze $\phi^a{}_\alpha$ su evidentno druge klase zbog (38). Primetimo takodje da je rešenje homogenog sistema $\int [\pi_{ao}{}^\alpha, \phi'_{\bar{m}}]\, u^{\prime\bar{m}}\, d\vec{x}' \approx 0$ trivijalno, odnosno $V_a{}^\alpha = 0$, tako da pomoću veza $\phi_a{}^\alpha$ ne možemo linearnim kombinacijama dobiti veze prve klase (uporediti tekst ispod formule (2.9)).

Na kraju ispitajmo uslove konzistentnosti poslednje grupe primarnih veza $\phi^b{}_\beta$. Koristeći formule (24), (30) kao i formulu

$$[\pi^a{}_\alpha, K'] = K\, b^a{}_\alpha\, \delta(\vec{x} - \vec{x}') \qquad (41)$$

možemo pokazati da veze $\phi^b{}_\beta$ "komutiraju" jedna sa drugom (to apriori nije očigledno jer u vezama figurišu $h_a{}^\alpha$ i $\pi^a{}_\alpha$) :

$$[\phi^a{}_\alpha, \phi^{\prime b}{}_\beta] = 0 \qquad (42)$$

Dokaz je neposredan, ali dosta dugačak.

Uzimajući u obzir da je prema (38)

$$\int [\phi^b{}_\beta, \pi'_{ao}{}^\alpha]\, u^{\prime ao}{}_\alpha\, d\vec{x}' = \frac{1}{2}\,\delta^{b\alpha}_{a\beta}\, u^{ao}{}_\alpha = \frac{1}{2}\, u^{bo}{}_\beta$$

uslovi konzistentnosti primarnih veza $\phi^{b}{}_{\beta}$ daju

$$\frac{1}{2} u^{bo}{}_{\beta} + \int [\phi^{b}{}_{\beta}, \phi'_{m}] u'^{m} d\vec{x}' + [\phi^{b}{}_{\beta}, \mathcal{H}] = 0 \qquad (43)$$

odakle možemo odrediti nepoznate funkcije $u^{bo}{}_{\beta}$. To da li će $u^{bo}{}_{\beta}$ zavisiti od u^{m} odnosno da li će biti moguće odrediti u^{m} iz uslova konzistentnosti veza materije ϕ_{m} zavisi od konkretnog izbora početnog Lagranžijana materije. U svakom slučaju nismo dobili nove sekundarne veze.

Time smo završili prvi korak procedure opisane na strani 13, odnosno dobili smo prvu grupu sekundarnih veza (naravno potpuno zanemarujemo uslove konzistentnosti veza materije ϕ_{m}, tako da bi sekundarnim vezama koje smo naveli trebalo dodati i eventualne sekundarne veze koje potiču od ovih veza).

Nadjimo eksplicitno sekundarne veze (31). Posmatrajmo prvo veze $H_{ab} = 0$. Koristeći formule (16), kao i (3.32) odmah dobijamo

$$H_{ab} = \frac{K}{\varkappa} h_{[a}{}^{\alpha} A^{o}{}_{b]\alpha} - \frac{1}{2} \pi S_{ab} u = 0 \qquad (44)$$

Umesto ovih veza pogodno je posmatrati veze u kojima je $A^{o}{}_{b\alpha}$ eliminisano pomoću primarnih veza $\phi^{b}{}_{\alpha}$:

$$\chi_{ab} \hat{=} 2 \left(H_{ab} - \frac{K}{\varkappa} h_{[a}{}^{\alpha} \eta_{b]c} \phi^{c}{}_{\alpha}\right) = 2 h_{[a}{}^{\alpha} \pi_{b]\alpha} - \pi S_{ab} u = 0 \qquad (45)$$

O ovim vezama biće više reči kasnije.

Veze H_{ao} dobijamo iz (15) i (3.32)

$$H_{ao} = \frac{K}{\varkappa} \left[A^{b}{}_{a\alpha} h_{b}{}^{\alpha} - \frac{1}{K} (K h_{a}{}^{\alpha})_{,\alpha} - \frac{\varkappa}{2K} \pi S_{ao} u\right] = 0 \qquad (46)$$

U Dodatku I će biti pokazano da se ove veze (u kojima nam figurišu $A^{ab}{}_{\alpha}$) zajedno sa vezama $[\pi_{ab}{}^{\alpha}, \mathcal{H}] = 0$ (up. (37)) mogu zameniti ekvivalentnim sistemom veza χ_{ab} i χ_{a} :

$$\chi_{ab\alpha} \hat{=} A_{ab\alpha} - (\Delta_{ab\alpha} + K_{ab\alpha}) = 0 \qquad (47)$$

$$\Delta_{ab\alpha} = b^{c}{}_{\alpha} (C_{cab} + C_{bca} - C_{abc})$$
$$C_{abc} = h_{a}{}^{[\alpha} h_{b}{}^{\beta]} b_{c\beta,\alpha} \qquad (48)$$

$$K_{ab\alpha} = b^{c}{}_{\alpha} (D_{cab} + D_{bca} - D_{abc})$$
$$D_{abc} = \frac{\varkappa}{K} \left[\frac{1}{4} \pi \eta_{c[b} S_{a]o} + \eta_{c[b} S_{a]d}{}^{d} - S_{abc}\right] \qquad (49)$$

$$S_{abc} \hat{=} b_{c\alpha} \partial H^{ml} / \partial A^{ab}{}_{\alpha} \equiv - b_{c\alpha} [\pi_{ab}{}^{\alpha}, \mathcal{H}^{ml}] \qquad (50)$$

$$\chi_{a} \hat{=} A^{o}{}_{ao} - (h_{a}{}^{\alpha} b^{o}{}_{o,\alpha} - b^{o}{}_{o} h_{o}{}^{\alpha} A^{o}{}_{a\alpha})$$
$$- \frac{\varkappa}{4K} b^{o}{}_{o} (4 S_{ab}{}^{b} - \pi S_{ao} u) = 0 \qquad (51)$$

tako da su veze H_{ao} posledice veza (47) odnosno važi

$$\chi_{ab\alpha} h^{b\alpha} \equiv H_{ao} \qquad (52)$$

Ovde je važno napomenuti sledeću činjenicu: veze (47) i (51) možemo smatrati rešenim po $A^{ab}{}_{\alpha}$ i $A^{o}{}_{ao}$ samo ako je S_{abc}, odnosno izraz $[\pi_{ab}{}^{\alpha}, \mathcal{H}^{m}]$, nezavisan od ovih veličina. Pošto H^{m} zavisi od A-ova samo preko kovarijantnih izvoda (prostornih) najjednostavnije je predpostaviti da je početni Lagranžijan materije linearan po brzinama (pa i po svim izvodima) tako da je

Hamiltonijan materije funkcija samo polja materije i njihovih impulsa, i ne sadrži izvode polja materije. Sličnu situaciju imamo i u Lagranževom formalizmu, kada moramo da učinimo istu predpostavku ako želimo da eksplicitno rešimo jednačine kretanja po A-potencijalima[1].

Da rezimiramo šta smo do sada dobili: iz uslova konzistentnosti primarnih veza, dobili smo sekundarne veze (34-35), (45), (47) i (51) i odredili smo u_a^{α} i u^{bo}_{β} tako da su nam za sada ostali neodredjeni u_o^{μ}, u^{ab}_o, u^{oa}_o, u^{ab}_{β} i u^m.

Predjimo sad nauslove konzistentnosti dobijenih sekundarnih veza. Vidimo odmah da nam veze $\chi_{ab\alpha}$ i λ_a omogućuju da odredimo množitelje u^{ab}_{α} i u^{oa}_o jer oni stoje uz primarne veze $\pi_{ab}^{\alpha} \approx 0$ i $\pi_{oa}^{o} \approx 0$ sa kojima gore navedene sekundarne veze imaju nenulte Poasonove zagrade proporcionalne Kronekerovim delta-funkcijama respektivno. Bitno je da ne dobijamo nove sekundarne veze. Mi nećemo odredjivati ove u-ove a ni u-ove date formulama (39) i (43) pošto ćemo konstrukcijom Dirakovih zagrada veze koje stoje uz ove množitelje učiniti jakim, odnosno strogo jednakim nuli. Na taj način će ovi množitelji veza ispasti iz teorije pa ih zato ne treba ni izračunavati.

Pošto smo obezbedili da uslovi konzistentnosti veza $\chi_{ab\alpha}$ i λ_a ne daju nove veze možemo pristupiti konstrukciji preliminarnih Dirakovih zagrada. Ove veze, zajedno sa primarnim vezama ϕ^a_{β} možemo pisati u obliku

$$A^{ij}_{\mu} = f^{ij}_{\mu}(h_k^{\nu}, \pi^k_{\nu}, u, \pi) \qquad i,j,\mu \neq a,b,o \tag{53}$$

(uporediti formule (20), (47-51)). Pored ovih veza posmatrajmo i primarne veze (22), odnosno njihov podskup

$$\pi_{ij}^{\mu} = 0 \qquad i,j,\mu \neq a,b,o \tag{54}$$

Iako je situacija vrlo slična primeru razmotrenom na strani 15, preliminarne Dirakove zagrade konstruisane pomoću ovih veza, nisu prosto jednake Poasonovim zagradama iz kojih su izbačene promenljive A^{ij}_{μ} i π_{ij}^{μ} $(i,j,\mu \neq a,b,o)$.

U Dodatku II dat je eksplicitni oblik ovih zagrada (up. formulu (D.II.3) koja se lako uopštava na slučaj teorije polja). Bitna osobina ovih preliminarnih zagrada je da one ne menjaju osnovne Poasonove zagrade izmedju preostalih varijabli u teoriji. Zato ćemo mi u svim izrazima u teoriji eliminisati A^{ij}_{μ} i π_{ij}^{μ} $i,j,\mu \neq a,b,o$ pomoću veza (53) i (54) i na dalje raditi sa ostalim promenljivima (mi nećemo izvršiti ovu zamenu eksplicitno - time bi dobili dosta komplikovane izraze koji nam neće biti potrebni - već ćemo na dalje jednostavno pod A^{ij}_{μ} podrazumevati odgovarajuće funkcije f^{ij}_{μ} od preostalih promenljivih a impulse π_{ij}^{μ} nećemo ni pisati).

Posle izvršene eliminacije ostali smo sa varijablama

$$h_a^{\alpha}, \ \pi^a_{\alpha}, \ h_o^{\mu}, \ \pi^o_{\mu}, \ A^{ab}_o \ \text{ i } \ \pi_{ab}^{o} \tag{57}$$

dok su preostale veze u teoriji

$$\phi_m = 0, \quad \pi^o_{\mu} = 0, \quad \pi_{ab}^{o} = 0 \qquad \text{(primarne)} \tag{58}$$

$$H^1 = 0, \quad H_{\alpha} = 0, \quad \chi_{ab} = 0 \qquad \text{(sekundarne)} \tag{59}$$

Kanonički Hamiltonijan možemo pisati u formi

$$H = b^o{}_o H^1 + b^o{}_o h_o{}^\alpha H_\alpha + \frac{1}{2} A^{ab}{}_o \chi_{ab} + D^\alpha{}_{,\alpha} \qquad (60)$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da su H_{ao} jake veze (uporediti formulu (52)) kao i formulu (45). Totalni Hamiltonijan dat je pomoću kanoničkog i preostalih primarnih veza (58) na uobičajeni način. Naravno i u H^1 i u H_α treba izvršiti eliminaciju $A^{ij}{}_\mu$, $i,j,\mu \neq a,b,o$. Ostalo je još da proverimo da li uslovi konzistentnosti sekundarnih veza (59) daju nove veze. Na osnovu smisla vezaprve klase - one predstavljaju funkcije generatrise beskonačno malih kontaktnih transformacija koje ne menjaju <u>fizičko</u> stanje sistema[2] - možemo u našoj teoriji očekivati sledeće veze prve klase: vezu koja odgovara proizvoljnosti izbora vremenske skale, 3 veze koje odgovaraju translacijama u ravni x^o = const i 6 veza koje odgovaraju rotacijama lokalno inercijalnih koordinatnih sistema u ovoj ravni. Ovim vezama respektivno treba da odgovaraju naše veze H^1, H_α, χ_{ab}. Ovu tvrdnju moguće je eksplicitno proveriti tek nakon eliminacije svih veza druge klase (uključujući i one koje potiču od materije). Inače se može desiti da neke od navedenih veza imaju nenulte Poasonove zagrade sa vezama materije[5]. U svakom slučaju uslovi konzistentnosti veza H^1, H, χ_{ab} ne mogu dati nove veze, a koeficijenti koji stoje uz njih u Hamiltonijanu (60) moraju ostati potpuno proizvoljni. Tako će, na primer, jednačina kretanja za $b^o{}_o$ dati (uporediti formulu (3.7))

$$\partial b^o{}_o / \partial t = u_o{}^o$$

a koeficijenat $u_o{}^o$, koji stoji uz vezu $\pi^o{}_o$ mora biti

proizvoljan jer $\pi^o{}_o$ "komutira" sa svim preostalim vezama u teoriji pošto one ne zavise od $h_o{}^o$ ($b^o{}_o = 1/h_o{}^o$ figuriše u vezi χ_a (up. formulu (51)), no to je jaka veza tako da sabirak $A^{oa}{}_o H_{oa}$ ispada iz teorije).

Potpuno analogno dokazuje se proizvoljnost koeficijenata $h_o{}^\alpha$, $A^{ab}{}_o$, $u_o{}^\alpha$ i $u^{ab}{}_o$, koji stoje uz odgovarajuće veze prve klase.

Uslove konzistentnosti veza materije ϕ_m treba ispitati u svakom konkretnom slučaju; u narednom odeljku posmatraćemo interakciju spinornog polja sa gravitacionim, tako da ćemo moći sprovesti Dirakovu proceduru do kraja znajući eksplicitni oblik veza ϕ_m.

Na kraju, prodiskutujmo ukratko činjenicu da je gustina Hamiltonijana naše teorije slabo jednaka nuli (ako izuzmemo 3-divergenciju $D^a{}_{,a}$), situacija veoma čudna sa fizičke tačke gledišta, bar na prvi pogled. Kao što je pokazao Dirak[2] ova osobina Hamiltonijana posledica je slobode u izboru vremenske skale. S druge strane, Hamiltonijan predstavlja energiju sistema, što bi značilo da je i totalna energija sistema nula. Rešenje kontradikcije leži u činjenici da doprinos 3-divergencije Hamiltonijanu može biti, zavisno od graničnih uslova netrivijalan. Mi ćemo predpostaviti da tetradna polja na prostornoj beskonačnosti odgovaraju Švarčvildovoj (Schwartzschield-ovoj) metrici:

$$h_o{}^o \to 1 - \frac{M}{r} \qquad h_a{}^\alpha \to \delta_a{}^\alpha + M \eta_{\beta\alpha} x^\alpha x^\beta / r^3$$

$$r = (- x_a x^a)^{1/2} \qquad a = 1,2,3$$

Koristeći formulu (17) kao i jake veze (20) i (48) dobijamo

$$\int d^3x\, D^a{}_{,a} = M$$

gde je M totalna energija izvora polja. Time smo, aposteori opravdali dodavanje 4-divergencije Lagranžijanu (2), jer smo dobili fizički očekivan rezultat[9),12)].

V. PRIMER SPINORNOG POLJA

Gravitacione interakcije čestica spina 1/2 interesantne su ne samo sa tačke gledišta elementarnih čestica već i u kosmologiji, pošto je materija u vasioni, prema sadašnjim posmatranjima, sačinjena pretežno od protona i neutrona. Mi ćemo razmotriti Hamiltonovu formulaciju Ajnštajn-Kartanove teorije spinornog polja koristeći opšte rezultate do kojih smo došli u predhodna dva odeljka.

Lagranžijan spinornog polja možemo uzeti u vidu simetričnom po ψ i $\bar{\psi}$

$$L'^{S} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\, i\, \gamma^k \overleftrightarrow{\partial}_k \psi - m\bar{\psi}\psi \qquad (1)$$

iz koga se lako dobijaju Dirakove jednačine za spinorno polje ψ i odgovarajuće "Dirakovski adjungovano" polje $\bar{\psi}$. Operator $\overleftrightarrow{\partial}_k$ definisan je na uobičajeni način. Označimo impuls koji odgovara ψ sa $\bar{\pi}'$ a impuls koji odgovara $\bar{\psi}$ sa π' (da bi u veličinama sa "‾" lakše prepoznali vrstu)

$$\delta L'^{S} = \pi' \delta\psi_{,0} + (\delta\bar{\psi}_{,0})\pi' \qquad (2)$$

Iz definicije impulsa odmah dobijamo primarne veze

$$\phi' \doteq \pi' + \frac{1}{2} i\, \gamma^0 \psi = 0 \qquad \bar{\phi}' \doteq \bar{\pi}' - \frac{1}{2}\bar{\psi}\, i\, \gamma^0 = 0 \qquad (3)$$

Primovane veličine i ovde se, kao u delu III, odnose na teoriju pre lokalizacije Poankareove grupe. Koristeći standardne

Poasonove zagrade

$$[\psi^r(x), \bar\pi'_s(y)] = - [\pi^r(x), \bar\psi_s(y)] = \delta^r_s \qquad r,s = 1,2,3,4$$

koje možemo pisati u kondenzovanom vidu

$$[\psi(x), \bar\pi'(y)] = - [\pi'(x), \bar\psi(y)] = I \tag{4}$$

gde je I jedinična 4x4 matrica. lako nalazimo

$$[\phi'(x), \bar\phi'(y)] = i\, \gamma^0\, \delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{5}$$

Pošto je Lagranžijan (1) linearan i nehomogen po brzinama Hamiltonijan će biti jednak nehomogenom delu uzetim sa suprotnim znakom. Totalni Hamiltonijan će, dakle, glasiti

$$H'^{ST} = - \frac{1}{2}\, \bar\psi\, i\, \gamma^a \overleftrightarrow{\partial}_a \psi + m\, \bar\psi\, \psi + \bar u\, \phi' + \bar\phi' u$$

$$= H'^S + \bar u\, \phi' + \bar\phi' u \tag{6}$$

Iz uslova konzistentnosti primarnih veza (3) lako možemo odrediti u i $\bar u$

$$u = - i\, \gamma^0 [\phi', H'^S] \qquad \bar u = [\bar\phi', H'^S]\, i\, \gamma^0$$

kao što i treba za veze druge klase kakve su ϕ i $\bar\phi$. Nama ovi u-ovi zapravo i nisu potrebni jer nakon konstrukcije Dirakovih zagrada veze (3) možemo smatrati jakim i zameniti ih u (6) tako da dobijamo

$$H'^{ST} = H'^S(\psi, \bar\pi') = - \bar\pi' \gamma^0\, \gamma^a \overleftrightarrow{\partial}_a \psi \tag{7}$$

(u-ovi, dakle, ispadaju iz teorije). Dirakove zagrade za preostale varijable u teoriji ψ i $\bar\pi$, možemo konstruisati analogno kao u Dodatku II tako da dobijamo

$$[\psi(x), \bar\pi'(y)]^D = \frac{1}{2}\, I\, \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

čime smo kompletirali Hamiltonovu formulaciju slobodnog spinornog polja.

Lagranžijan (1) invarijantan je u odnosu na Poenkareovu grupu (uporediti formule (1.13-14)) pri čemu se ψ transformiše pomoću

$$S_{ij} = \frac{1}{4} [\gamma_i, \gamma_j] \tag{8}$$

dok se polje $\bar\psi$ transformiše pomoću S^{-1}. Odatle vidimo da kovarijantne izvode za spinorna polja treba uvesti formulama

$$D_k \psi = h_k{}^{\mu} (\psi,_{\mu} + \frac{1}{2} A^{ij}{}_{\mu}\, S_{ij}\, \psi) \tag{9}$$

$$D_k \bar\psi = h_k{}^{\mu} (\bar\psi,_{\mu} - \frac{1}{2} A^{ij}{}_{\mu}\, \bar\psi\, S_{ij}) \tag{10}$$

Nakon lokalizacije Poankareove grupe Lagranžijan spinorne materije u gravitacionom polju dobijamo po formuli (1.21) odnosno eksplicitno

$$L^{Sg} = b\, (\frac{1}{2}\, \bar\psi\, i\, \gamma^k\, D_k \psi - m\, \bar\psi\, \psi) \tag{11}$$

Ovom Lagranžijanu sada možemo dodati Ajnštajn-Kartanov Lagranžijan (4.1), iskoristiti vremenski kalibracioni uslov (3.13) i sprovesti Dirakovu proceduru. Ovaj postupak izložen je u

referenci 5). Mi ćemo, medjutim primeniti opšte rezultate izložene u odeljcima III i IV i tako reprodukovati većinu rezultata iz navedenog rada.

Da bismo direktno primenili formule iz predhodna dva odeljka bilo bi potrebno da spinorna polja ψ i $\bar\psi$ posmatramo kao kolonu sa osam elemenata što bi bilo prilično glomazno i nepodesno. Zato ćemo mi u par koraka ponoviti postupak koji nas je doveo do formula (3.29-32), tretirajući ψ i $\bar\psi$ odvojeno, i videti kakve su modifikacije u tom slučaju nužne. Tako dobijamo

$$H^{sg} = b^o{}_o \, K \, H'^s(\psi, D_a\psi, \bar\psi, D_a\bar\psi, \pi/K, \bar\pi/K) + b^o{}_o \, h_o{}^\alpha \left[- b^a{}_\alpha (\bar\pi D_a \psi + (D_a \bar\psi)\pi) \right] + A^{ij}{}_o \left[-\frac{1}{2} (\bar\psi S_{ij} \pi - \bar\pi S_{ij} \psi) \right] \qquad (12)$$

gde je H'^s dato formulom (6). Poredjenjem sa formulama (3.29-32) zaključujemo da u svim formulama iz predhodna dva odeljka treba, svuda gde se javlja, zameniti izraz πS_{ij} u sa $\bar\pi S_{ij}\psi - \bar\psi S_{ij} \pi$. Primarne veze dobijamo po receptu (3.20) (ili (4.36), jer u njima ne figurišu izvodi) i one glase

$$\bar\phi \doteq \bar\pi - \frac{K}{2} \bar\psi \, i \, \gamma^o \approx 0 \qquad \phi \doteq \pi + \frac{K}{2} i \, \gamma^o \psi \approx 0 \qquad (13)$$

Korišćenjem ovih veza kao i formula

$$\gamma_k S_{ij} + S_{ij} \gamma_k = -\varepsilon_{ijkl} \gamma^l \gamma^5 \qquad (14)$$

$$J^k = i \bar\psi \gamma^k \gamma^5 \psi \qquad \gamma^5 = i \gamma^o \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \qquad (15)$$

(ε_{ijkl} je potpuno antisimetričan tenzor i $\varepsilon_{0123} = -1$), dobijamo eksplicitni oblik Hamiltonijana (12)

$$H^{sl} = K \left[-\frac{1}{2} h_a{}^\alpha (\bar\psi \, i \, \gamma^a \overleftrightarrow{\partial}_\alpha \psi) + m \bar\psi \psi - \frac{1}{4} h^{a\alpha} \varepsilon_{oabc} (2 A^{bo}{}_\alpha J^c + A^{bc}{}_\alpha J^o) \right] \qquad (16)$$

$$H^s{}_\alpha = \frac{1}{4} K \, (-2 \bar\psi \, i \, \gamma^o \overleftrightarrow{\partial}_\alpha \psi + \varepsilon_{oabc} A^{ab}{}_\alpha J^c) \qquad (17)$$

$$H^s{}_{oa} = 0 \qquad H^s{}_{ab} = \frac{1}{4} K \varepsilon_{oabc} J^c \qquad (18)$$

odakle opet vidimo da je u našem slučaju potrebno izvršiti zamenu

$$\pi S_{oa} u \to 0 \; ; \quad \pi S_{ab} u \to \frac{1}{4} K \varepsilon_{oabc} J^c \qquad (19)$$

Koristeći eksplicitni oblik Hamiltonijana (16) lako nalazimo i veličinu S_{abc} datu formulom (4.50)

$$S_{abc} \doteq b_{c\alpha} \, \partial H^{sl} / \partial A^{ab}{}_\alpha = -\frac{1}{4} K \varepsilon_{oabc} J^o \qquad (20)$$

Zamena formula (19) i (20) u formule (4.47-51) daje

$$\chi_a = A^o{}_{ao} - (h_a{}^\alpha b^o{}_{o,\alpha} - b^o{}_o h_o{}^\alpha A^o{}_{a\alpha}) \approx 0 \qquad (21)$$

$$\chi_{ab\alpha} = A_{ab\alpha} - (\Delta_{ab\alpha} + K_{ab\alpha}) \approx 0 \qquad (22)$$

$$K_{ab\alpha} = -\frac{\varkappa}{4} b^c{}_\alpha \varepsilon_{oabc} J^o \qquad (23)$$

gde je $\Delta_{ab\alpha}$ dato formulama (4.48). Pri izvodjenju predhodnih

izraza iskoristili smo da je zbog (20) $S_{ab}{}^{b} = 0$. Formule (21-23) kao i vezu $\phi^{b}{}_{\beta}$ datu formulom (4.20) možemo iskoristiti za eliminaciju $A^{ij}{}_{\mu}$ i $\pi_{ij}{}^{\mu}$ iz teorije kao što je opisano u predhodnom odeljku $(i,j,\mu \neq a,b,o)$, pri čemu ih treba izbaciti i iz Poasonovih zagrada kao što je objašnjeno u Dodatku II. Pomoću primarnih veza koje potiču iz spinornog dela Lagranžijana (13) možemo konstruisati finalne Dirakove zagrade, nakon čega veze (13) možemo pisati kao jake veze u obliku

$$\bar{\psi} = -2\, i\, \bar{\pi}\, \gamma^{o} \qquad \pi = -\frac{1}{2}\, i\, \gamma^{o}\, \psi \tag{24}$$

i pomoću njih eliminisati $\bar{\psi}$ i π iz teorije. Osnovne Dirakove zagrade za preostale varijable biće jednake Poasonovim zagradama osim za ψ, $\bar{\pi}$, $\pi^{a}{}_{\alpha}$. Konstrukcija ovih zagrada izložena je u Dodatku II i one imaju sledeći vid

$$\{\psi,\ \bar{\pi}'\}^{D} = \frac{1}{2}\, I\ \delta(\vec{x}-\vec{x}') \tag{25}$$

$$\{\pi^{a}{}_{\alpha},\ \psi'\}^{D} = \frac{1}{2}\, b^{a}{}_{\alpha}\, \psi\, \delta(\vec{x}-\vec{x}') \tag{26}$$

$$\{\pi^{a}{}_{\alpha},\ \bar{\pi}'\}^{D} = -\frac{1}{2}\, b^{a}{}_{\alpha}\, \bar{\pi}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}') \tag{27}$$

Ove zagrade očigledno su različite od standardnih, Poasonovih, i one su iste kao u radu[4]. Time smo opravdali da eliminacija A-stepeni slobode, koja je u ovom radu izvršena u Lagranžijanu korišćenjem jednačina kretanja, nije uticala na konstrukciju Dirakovih zagrada za preostale varijable. Stoga su rezultati dobijeni u ovom odeljku esencijalno isti kao u Kasujinom radu, osim po pitanju 3-divergencije diskutovane u predhodnom odeljku.

Prednost rezultata dobijenih u predhodna dva odeljka u odnosu na rezultate u Kasujinom radu je ne samo u činjenici da se naši zaključci odnose na generalni linearni Lagranžijan materije, već i mogućnost da se sličan postupak primeni na kvadratične Lagranžijane (pri tome svi zaključci trećeg odeljka ostaju na snazi!). U ovim teorijama treba očekivati manje primarnih veza, jer će se neki A-ovi propagirati, tako da u sprovodjenju Dirakovog postupka treba očekivati manje problema pri ispitivanju uslova konzistentnosti veza.

Na kraju recimo da su preostale veze u teoriji $H^{1} \approx 0$ $H_{\alpha} \approx 0$ i $\gamma_{ab} \approx 0$ kao i $\pi^{o}{}_{\alpha} \approx 0$ i $\pi_{ab}{}^{o} \approx 0$ (uporediti formule (4.58-59) i tekst ispod njih) veze prve klase nakon eliminacije A-potencijala, $\bar{\psi}$ i π, tako da su koeficijenti koji stoje uz njih u Hamiltonijanu potpuno proizvoljne funkcije. Zato je naš H^{T} zapravo jednak H^{E} (up. (2.15)).

DODATAK I

U ovom dodatku pokazaćemo da veze $[\pi_{ab}{}^{\beta}, H] = 0$ zajedno sa sekundarnim vezama (4.46) i (4.44) odnosno

$$A^{a}{}_{b\alpha}\, h_{a}{}^{\alpha} = \frac{1}{K} (K\, h_{b}{}^{\alpha})_{,\alpha} + \frac{\varkappa}{2K}\, \pi\, S_{bo}\, u \qquad (1)$$

$$h_{[a}{}^{\alpha}\, A^{o}{}_{b]\alpha} = \frac{\varkappa}{2K}\, \pi\, S_{ab}\, u \qquad (2)$$

dovode do veza χ_{ab} i χ_{a} koje su date formulama (4.47-51). Uzimajući u obzir eksplicitni oblik Hamiltonijana gravitacionog polja (4.13-16), kao i formulu za izvod delta funkcije

$$\int f(t,\vec{x},\vec{x}')\, \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} (\delta(\vec{x}-\vec{x}'))\, d^{3}x' = - \left.\frac{\partial f(t,\vec{x}',\vec{x})}{\partial x'^{\alpha}}\right|_{\vec{x}'=\vec{x}} \qquad (3)$$

vidimo da treba naći Poasonove zagrade impulsa $\pi_{ab}{}^{\beta}$ i izraza

$$\frac{K}{\varkappa}\, b^{o}{}_{o} \left[\frac{1}{Kb^{o}{}_{o}} (k\, b^{o}{}_{o}\, h_{[a}{}^{\alpha}\, h_{b]}{}^{\beta})_{,\alpha} + h_{a}{}^{[\alpha}\, h_{b}{}^{\beta]}\, A^{a}{}_{c\alpha}\, A^{cb}{}_{\beta} + \right.$$
$$\left. + 2\, h_{o}{}^{[\beta}\, h_{a}{}^{\alpha]}\, A^{ab}{}_{\alpha}\, A_{b}{}^{o}{}_{\beta} - h_{o}{}^{o}\, h_{b}{}^{\beta}\, A^{oa}{}_{o}\, A^{b}{}_{a\beta}\right]$$

Koristeći eksplicitno Poasonove zagrade (4.24´) dobijamo da naše veze možemo pisati u obliku

$$b^{o}{}_{o}\, \frac{K}{\varkappa} \left[\frac{1}{K}\, h_{o}{}^{o}\, (K\, b^{o}{}_{o}\, h_{[a}{}^{\alpha}\, h_{b]}{}^{\beta})_{,\alpha} + 2\, h_{o}{}^{[\alpha}\, h_{[a}{}^{\beta]}\, A^{o}{}_{b]\alpha} - \right.$$
$$\left. - h_{o}{}^{o}\, A^{o}{}_{[ao}\, h_{b]}{}^{\beta} - 2\, h_{c}{}^{[\alpha}\, h_{[b}{}^{\beta]}\, A^{c}{}_{a]\alpha}\right] + [\pi_{ab}, H^{m}] = 0 \qquad (4)$$

Poslednji sabirak lako nalazimo pomoću izraza za Hamiltonijan

materije u gravitacionom polju (3.29-32)

$$[\pi_{ab}{}^{\beta}, H^{m}] = b^{o}{}_{o}\, S_{ab}{}^{\beta} + \frac{1}{2}\, b^{o}{}_{o}\, h_{o}{}^{\beta}\, S_{ab}\, u \qquad (5)$$

$$S_{ab}{}^{\beta} \doteq [\pi_{ab}{}^{\beta}, H^{ml}] \qquad (6)$$

Koristeći sada formule (5) i (6) kao i veze (1) i (2) jednakost (4) možemo prepisati u obliku

$$h_{c}{}^{\beta}\, h_{[b}{}^{\alpha}\, A^{c}{}_{a]\alpha} - h_{[b}{}^{\beta}\, f_{a]} + h_{[a}{}^{\alpha}\, h_{b]}{}^{\beta}{}_{,\alpha} + \frac{\varkappa}{K}\, S_{ab}{}^{\beta} = 0 \qquad (7)$$

gde smo sa f_{a} označili veličinu

$$f_{a} \doteq h_{a}{}^{\alpha}\, b^{o}{}_{o}\, h_{o}{}^{o}{}_{,\alpha} + h_{o}{}^{\alpha}\, A^{o}{}_{a\alpha} + h_{o}{}^{o}\, A^{o}{}_{ao} + \frac{\varkappa}{2K}\, \pi\, S_{ao}\, u \qquad (8)$$

Primetimo da nam u jednačinama (7) i (8) figurišu za sada neodredjeni $A^{ab}{}_{\alpha}$ i $A^{o}{}_{ao}$ dok $A^{o}{}_{a\alpha}$ možemo eliminisati korišćenjem primarnih veza $\phi^{b}{}_{\beta}$ datim formulom (4.20). Ako pomnožimo (7) sa $b^{b}{}_{\beta}$ možemo odrediti veličinu f_{a}

$$f_{a} = \frac{\varkappa}{4K} (\pi\, S_{ao}\, u + 4\, S_{ab}{}^{\beta}\, b^{b}{}_{\beta}) \qquad (9)$$

odakle pomoću (8) lako nalazimo $A^{o}{}_{ao}$ odnosno dobijamo

$$A^{o}{}_{ao} = h_{a}{}^{\alpha}\, b^{o}{}_{o,\alpha} - b^{o}{}_{o}\, h_{o}{}^{\alpha}\, A^{o}{}_{a\alpha} + \frac{\varkappa}{K} (S_{ab}{}^{b} - \frac{1}{4}\, \pi\, S_{ao}\, u) \qquad (10)$$

gde smo definisali $S_{abc} \doteq b_{c\beta}\, S_{ab}{}^{\beta}$. Tako smo izveli vezu χ_{a}. Dalje, množenjem (7) sa $b_{c\beta}$ dobijamo

$$h_{[a}{}^{\alpha}\, A_{b]c\alpha} = \Delta_{abc} + K_{abc} = \Phi_{abc} \qquad (11)$$

DODATAK I

U ovom dodatku pokazaćemo da veze $[\pi_{ab}{}^{\beta}, \mathcal{H}] = 0$ zajedno sa sekundarnim vezama (4.46) i (4.44) odnosno

$$A^{a}{}_{b\alpha}\, h_{a}{}^{\alpha} = \frac{1}{K}(K\, h_{b}{}^{\alpha})_{,\alpha} + \frac{\varkappa}{2K}\, \pi\, S_{bo}\, u \tag{1}$$

$$h_{[a}{}^{\alpha}\, A^{o}{}_{b]\alpha} = \frac{\varkappa}{2K}\, \pi\, S_{ab}\, u \tag{2}$$

dovode do veza χ_{ab} i χ_{a} koje su date formulama (4.47-51). Uzimajući u obzir eksplicitni oblik Hamiltonijana gravitacionog polja (4.13-16), kao i formulu za izvod delta funkcije

$$\int f(t,\vec{x},\vec{x}')\, \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}}\, (\delta(\vec{x}-\vec{x}'))\, d^{3}x' = - \left.\frac{\partial f(t,\vec{x}',\vec{x})}{\partial x^{\alpha}}\right|_{\vec{x}'=\vec{x}} \tag{3}$$

vidimo da treba naći Poasonove zagrade impulsa $\pi_{ab}{}^{\beta}$ i izraza

$$\frac{K}{\varkappa}\, b^{o}{}_{o} \Big[\frac{1}{K b^{o}{}_{o}}\, (k\, b^{o}{}_{o}\, h_{[a}{}^{\alpha}\, h_{b]}{}^{\beta})_{,\alpha} + h_{a}{}^{[\alpha}\, h_{b}{}^{\beta]}\, A^{a}{}_{c\alpha}\, A^{cb}{}_{\beta} +$$

$$+ 2\, h_{o}{}^{[\beta}\, h_{a}{}^{\alpha]}\, A^{ab}{}_{\alpha}\, A_{b}{}^{o}{}_{\beta} - h_{o}{}^{o}\, h_{b}{}^{\beta}\, A^{oa}{}_{o}\, A^{b}{}_{a\beta}\Big]$$

Koristeći eksplicitno Poasonove zagrade (4.24´) dobijamo da naše veze možemo pisati u obliku

$$b^{o}{}_{o}\, \frac{K}{\varkappa} \Big[\frac{1}{K}\, h_{o}{}^{o}\, (K\, b^{o}{}_{o}\, h_{[a}{}^{\alpha}\, h_{b]}{}^{\beta})_{,\alpha} + 2\, h_{o}{}^{[\alpha}\, h_{[a}{}^{\beta]}\, A^{o}{}_{b]\alpha} -$$

$$- h_{o}{}^{o}\, A^{o}{}_{[ao}\, h_{b]}{}^{\beta} - 2\, h_{c}{}^{[\alpha}\, h_{[b}{}^{\beta]}\, A^{c}{}_{a]\alpha}\Big] + [\pi_{ab}, \mathcal{H}^{m}] = 0 \tag{4}$$

Poslednji sabirak lako nalazimo pomoću izraza za Hamiltonijan

materije u gravitacionom polju (3.29-32)

$$[\pi_{ab}{}^{\beta}, \mathcal{H}^{m}] = b^{o}{}_{o}\, S_{ab}{}^{\beta} + \frac{1}{2}\, b^{o}{}_{o}\, h_{o}{}^{\beta}\, S_{ab}\, u \tag{5}$$

$$S_{ab}{}^{\beta} \mathrel{\hat{=}} [\pi_{ab}{}^{\beta}, \mathcal{H}^{m1}] \tag{6}$$

Koristeći sada formule (5) i (6) kao i veze (1) i (2) jednakost (4) možemo prepisati u obliku

$$h_{c}{}^{\beta}\, h_{[b}{}^{\alpha}\, A^{c}{}_{a]\alpha} - h_{[b}{}^{\beta}\, f_{a]} + h_{[a}{}^{\alpha}\, h_{b]}{}^{\beta}{}_{,\alpha} + \frac{\varkappa}{K}\, S_{ab}{}^{\beta} = 0 \tag{7}$$

gde smo sa f_{a} označili veličinu

$$f_{a} \mathrel{\hat{=}} h_{a}{}^{\alpha}\, b^{o}{}_{o}\, h_{o}{}^{o}{}_{,\alpha} + h_{o}{}^{\alpha}\, A^{o}{}_{a\alpha} + h_{o}{}^{o}\, A^{o}{}_{ao} + \frac{\varkappa}{2K}\, \pi\, S_{ao}\, u \tag{8}$$

Primetimo da nam u jednačinama (7) i (8) figurišu za sada neodredjeni $A^{ab}{}_{\alpha}$ i $A^{o}{}_{ao}$ dok $A^{o}{}_{a\alpha}$ možemo eliminisati korišćenjem primarnih veza $\phi^{b}{}_{\beta}$ datim formulom (4.20). Ako pomnožimo (7) sa $b^{b}{}_{\beta}$ možemo odrediti veličinu f_{a}

$$f_{a} = \frac{\varkappa}{4K}\, (\pi\, S_{ao}\, u + 4\, S_{ab}{}^{\beta}\, b^{b}{}_{\beta}) \tag{9}$$

odakle pomoću (8) lako nalazimo $A^{o}{}_{ao}$ odnosno dobijamo

$$A^{o}{}_{ao} = h_{a}{}^{\alpha}\, b^{o}{}_{o,\alpha} - b^{o}{}_{o}\, h_{o}{}^{\alpha}\, A^{o}{}_{a\alpha} + \frac{\varkappa}{K}\, (S_{ab}{}^{b} - \frac{1}{4}\, \pi\, S_{ao}\, u) \tag{10}$$

gde smo definisali $S_{abc} \mathrel{\hat{=}} b_{c\beta}\, S_{ab}{}^{\beta}$. Tako smo izveli vezu χ_{a}. Dalje, množenjem (7) sa $b_{c\beta}$ dobijamo

$$h_{[a}{}^{\alpha}\, A_{b]c\alpha} = \Delta_{abc} + K_{abc} = \Phi_{abc} \tag{11}$$

$$C_{abc} \hat{=} h_a{}^{[\alpha} h_b{}^{\beta]} b_{c\beta,\alpha} \qquad K_{abc} \hat{=} f_{[a}\, \eta_{b]c} - \frac{\varkappa}{K} S_{abc} \tag{12}$$

Neposrednom proverom možemo se ubediti da je rešenje jednačine (11) dato formulom

$$A_{bc\alpha} \approx b^a{}_\alpha (\varphi_{abc} + \varphi_{cab} - \varphi_{bca}) \tag{13}$$

što je zajedno sa (9), (11) i (12) ekvivalentno vezi χ_{abc} .

DODATAK II

U ovom dodatku opravdaćemo prvo eliminaciju A-potencijala i konstrukciju odgovarajućih preliminarnih Dirakovih zagrada a zatim pokazati kako se konstruišu finalne Dirakove zagrade u slučaju spinornog polja.

Zbog jednostavnosti razmotrićemo prvo slučaj sa konačnim brojem stepeni slobode q_r $r = 1,\dots,R$ i predpostavimo da smo Dirakovom procedurom dobili veze

$$\phi_1 \hat{=} p_1 \approx 0 \qquad \phi_2 \hat{=} q_1 - f_1(q_i, p_j) \approx 0 \qquad i,j = 2,\dots,R \tag{1}$$

(uporediti formule (4.53-54)). Konstruišimo preliminarne Dirakove zagrade za ovaj par veza. Matrica M_{ab} čiji su elementi $M_{ab} = [\phi_a, \phi_b]$ $a,b = 1,2$ u ovom je slučaju specijalno jednostavna tako da je

$$M = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = - C \equiv M^{-1} \tag{2}$$

Formula za Dirakove zagrade je

$$[A, B]^D = [A, B] - [A, \phi_1][\phi_2, B] + [A, \phi_2][\phi_1, B]$$

odakle za Dirakove zagrade proizvoljne dve varijable A i B (funkcije svih koordinata i impulsa) dobijamo

$$[A, B]^D = [A, B]^o + \frac{\partial A}{\partial q_1}[f_1, B] + \frac{\partial B}{\partial q_1}[A, f_1] \tag{3}$$

gde smo indeksom "o" označili Poasonove zagrade iz kojih su izbačeni p_1 i q_1 :

$$[A, B]^o = \frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial B}{\partial p^j} - \frac{\partial A}{\partial p^j}\frac{\partial B}{\partial q_j} \qquad j = 2,\dots,R \qquad (4)$$

Nakon konstrukcije Dirakovih zagrada veze ϕ_1 i ϕ_2 možemo smatrati jakim i zameniti ih svuda u teoriji. Tako dobijamo nove "primovane" varijable

$$A'(q_j, p_j) = A(q_r, p_r)\Big|_{\substack{q_1 = f_1 \\ p_1 = 0}} \qquad (5)$$

iz kojih su promenljive q_1 i p_1 izbačene pomoću veza (1). Preliminarne Dirakove zagrade za ovakve dve varijable lako nalazimo pomoću (4)

$$[A', B']^D = [A', B']^o \qquad (6)$$

odakle vidimo da su one prosto jednake Poasonovim zagradama konstruisanim pomoću preostalih varijabli. Korišćenjem iterativne osobine Dirakovih zagrada lako proširujemo ovo tvrdjenje na slučaj kada imamo nekoliko impulsa koji su jednaki nuli i odgovarajućih koordinata jednakih nekim funkcijama preostalih koordinata i impulsa. U slučaju teorije polja dokaz je potpuno analogan kao što će biti jasno iz narednih razmatranja.

Razmotrimo kako se u slučaju sistema sa beskonačno mnogo stepeni slobode menjaju formule (2.12-13)[9]. Matrica M_{ab} i njena inverzna matrica C_{ab} date su formulama

$$M_{ab}(x,x') \doteq [\phi_a(x), \phi_b(x')] \qquad (7)$$

$$\int M_{ab}(x,y)\, C^{bc}(y,z)\, d^3y = \delta^c{}_a\, \delta(\vec{x}-\vec{z}) \qquad (8)$$

pri čemu je $x^o = y^o = z^o = x'^o = w^o$. Dirakove zagrade su

$$[A(x), B(y)]^D = [A(x), B(y)] -$$

$$- \int d^3z\, d^3w\, [A(x), \phi_a(z)]\, C^{ab}(z,w)\, [\phi_b(w), B(y)] \qquad (9)$$

Posmatrajmo sada specijalni slučaj kada su veze takvog oblika da su odgovarajuće Poasonove zagrade proporcionalne Dirakovoj delta funkciji odnosno kada je

$$M_{ab}(x,y) = M'_{ab}\, \delta(\vec{x}-\vec{y}) \qquad (10)$$

pri čemu je matrica M' konstantna. U tom slučaju je

$$C^{ab}(x,y) = C'^{ab}\, \delta(\vec{x}-\vec{y}) \qquad (11)$$

gde je C' matrica inverzna matrici M' (zamenom (10) i (11) u (8) lako se dobija identitet). Umesto (9) tada imamo

$$[A(x), B(y)]^D = [A(x), B(y)] -$$

$$- \int d^3z\, [A(x), \phi_a(z)]\, C'^{ab}\, [\phi_b(z), B(y)] \qquad (12)$$

Primenimo sada dobijene formule na slučaj spinornog polja odnosno veza

$$\bar{\phi} \doteq \bar{\pi} - \underline{K}\, \bar{\psi}\, i\, \gamma^o = 0 \qquad \phi \doteq \pi + \frac{K}{2}\, i\, \gamma^o\, \psi = 0 \qquad (13)$$

Koristeći standardne Poasonove zgrade

gde smo indeksom "o" označili Poasonove zagrade iz kojih su izbačeni p_1 i q_1 :

$$[A, B]^{o} = \frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial B}{\partial p^j} - \frac{\partial A}{\partial p^j} \frac{\partial B}{\partial q_j} \qquad j = 2,\dots,R \tag{4}$$

Nakon konstrukcije Dirakovih zagrada veze ϕ_1 i ϕ_2 možemo smatrati jakim i zameniti ih svuda u teoriji. Tako dobijamo nove "primovane" varijable

$$A'(q_j, p_j) = A(q_r, p_r)\Big|_{\substack{q_1 = f_1 \\ p_1 = 0}} \tag{5}$$

iz kojih su promenljive q_1 i p_1 izbačene pomoću veza (1). Preliminarne Dirakove zagrade za ovakve dve varijable lako nalazimo pomoću (4)

$$[A', B']^{D} = [A', B']^{o} \tag{6}$$

odakle vidimo da su one prosto jednake Poasonovim zagradama konstruisanim pomoću preostalih varijabli. Korišćenjem iterativne osobine Dirakovih zagrada lako proširujemo ovo tvrdjenje na slučaj kada imamo nekoliko impulsa koji su jednaki nuli i odgovarajućih koordinata jednakih nekim funkcijama preostalih koordinata i impulsa. U slučaju teorije polja dokaz je potpuno analogan kao što će biti jasno iz narednih razmatranja.

Razmotrimo kako se u slučaju sistema sa beskonačno mnogo stepeni slobode menjaju formule (2.12-13)[9]. Matrica M_{ab} i njena inverzna matrica C_{ab} date su formulama

$$M_{ab}(x, x') \hat{=} [\phi_a(x), \phi_b(x')] \tag{7}$$

$$\int M_{ab}(x,y)\, C^{bc}(y,z)\, d^3y = \delta^c{}_a\, \delta(\vec{x}-\vec{z}) \tag{8}$$

pri čemu je $x^o = y^o = z^o = x'^o = w^o$. Dirakove zagrade su

$$[A(x), B(y)]^{D} = [A(x), B(y)] - \int d^3z\, d^3w\, [A(x), \phi_a(z)]\, C^{ab}(z,w)\, [\phi_b(w), B(y)] \tag{9}$$

Posmatrajmo sada specijalni slučaj kada su veze takvog oblika da su odgovarajuće Poasonove zagrade proporcionalne Dirakovoj delta funkciji odnosno kada je

$$M_{ab}(x,y) = M'_{ab}\, \delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{10}$$

pri čemu je matrica M' konstantna. U tom slučaju je

$$C^{ab}(x,y) = C'^{ab}\, \delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{11}$$

gde je C' matrica inverzna matrici M' (zamenom (10) i (11) u (8) lako se dobija identitet). Umesto (9) tada imamo

$$[A(x), B(y)]^{D} = [A(x), B(y)] - \int d^3z\, [A(x), \phi_a(z)]\, C'^{ab}\, [\phi_b(z), B(y)] \tag{12}$$

Primenimo sada dobijene formule na slučaj spinornog polja odnosno veza

$$\bar{\phi} \hat{=} \bar{\pi} - \underline{K}\, \bar{\psi}\, i\, \gamma^{o} \approx 0 \qquad \phi \hat{=} \pi + \frac{K}{2}\, i\, \gamma^{o}\, \psi \approx 0 \tag{13}$$

Koristeći standardne Poasonove zgrade

$$[\psi, \bar{\pi}'] = I\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad [\pi, \bar{\psi}'] = -\,I\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (14)$$

(I je jedinična 4x4 matrica) dobijamo

$$[\phi, \bar{\phi}'] = i\,K\,\gamma^0\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (15)$$

tako da možemo primeniti formule (10) - (12). Matrice M' i C' date su formulama

$$M' = i\,K \begin{vmatrix} 0 & \gamma^0 \\ -\gamma^0 & 0 \end{vmatrix} = -\,C' \qquad (16)$$

pri čemu smo iskoristili da je $(\gamma^0)^2 = I$. Dirakove zagrade za proizvoljne dve varijable postaju

$$[A, B']^D = [A, B'] + \frac{i}{K}\int d^3x''\,[A, \bar{\phi}'']\,\gamma^0\,[\phi'', B'] - \frac{i}{K}\int d^3x''\,[B', \bar{\phi}'']\,\gamma^0\,[\phi'', A] \qquad (17)$$

Iz predhodne formule je jasno da ako A i B ne zavise od spinornih polja i njihovih impulsa kao i od π^a njihove Dirakove zagrade biće prosto jednake Poasonovim zagradama, jer će poslednja dva sabirka u (17) biti jednaka nuli. Drugim rečima osnovne Dirakove zagrade za varijable koje "komutiraju" sa vezama (13) (a to su $A^{ab}{}_0$, $\pi_{ab}{}^0$, $h_0{}^\mu$, $\pi^0{}_\mu$, $h_a{}^\alpha$, (pošto smo izbacili A-potencijale i njihove impulse pomoću veza (4.53-54)), ostaju iste. Mogu se promeniti jedino osnovne Dirakove zagrade dve promenljive iz skupa ψ, $\bar{\psi}$, π, $\bar{\pi}$ i $\pi^a{}_\alpha$. Pošto ćemo mi na kraju izbaciti iz teorije $\bar{\psi}$ i π pomoću relacija

$$\bar{\psi} = -\,2\,i\,\bar{\pi}\,\gamma^0/K \qquad \pi = -\,i\,K\,\gamma^0\,\psi/2 \qquad (18)$$

koje slede iz veza (13) nakon što one postanu jake veze, dovoljno je naći finalne Dirakove zagrade za ψ, $\bar{\pi}$ i $\pi^a{}_\alpha$. Direktnim računom, pomoću formule (17) dobijamo da su osnovne finalne Dirakove zagrade u teoriji u kojoj je izvršena eliminacija (18)

$$[\psi, \bar{\pi}']^D = \frac{1}{2}\,I\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (19)$$

$$[\pi^a{}_\alpha, \psi']^D = \frac{1}{2}\,b^a{}_\alpha\,\psi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (20)$$

$$[\pi^a{}_\alpha, \bar{\pi}']^D = -\,\frac{1}{2}\,b^a{}_\alpha\,\bar{\pi}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (21)$$

a to i jesu formule (5.25-27).

LITERATURA

1) T.W.B. Kibble, J.Math.Phys. 2 (1961), 212

2) P.A.M. Dirac, Can.J.M. 2 (1950), 129 ; Lectures on Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Science, Monograph Series (New York, 1964).

3) P.A.M. Dirac, in Recent Dvelopments in General Relativity (PWN - Polish Scientific Publications, Warsaw; 1962), p.191.

4) M. Kasuya, Prog. of Theor. Phys. 60, (1978) 167.

5) M. Blagojević, I. Nikolić, D. Popović, Dj. Živanović, IF - 80/01.

6) Poincare Gauge Theory of Gravity and Its Hamiltonial Formulation, od istih autora kao i 5), primljeno za štampu u Il Nuovo Cimento B.

7) Gravitation and Cosmology, Steven Weinberg, John Wiley and Sons, Inc. 1972.

8) A.A. Slavnov, L.D. Fadejev, Vdenije v kvantovu teoriju kalibrovočnih polja, Nauka, M., 1978.

9) A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim, Constrained Hamiltonian Systems, Academia Nazionale dei Lincei (Roma, 1976).

10) P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A 246, 333 (1958).

11) J.M. Nester, Dissertation, PP 77-237 (1977), University of Maryland, College Park, Maryland.

12) L.D. Fadeev, in Proceedings of the 5-th International Conference on Gravitation and Relativity, Tbilisi (1968).